熱対流問題の分岐解の数値的検証について

中尾充宏　山本　野人　木村誠二　九州大学大学院数理学研究科
渡部善隆　九州大学大型計算機センター
西田孝明　京都大学大学院理学研究科

本講演では, 定常熱対流問題の数学モデルである, 次の連立非線形偏微分方程式 [1] の解に対する数値的検証法の定式化とその数値計算結果について述べる.

$$\begin{cases} \mathcal{P}\Delta^2\Psi &= \mathcal{P}\mathcal{R}\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z \ (\equiv f_1(\Psi,\Theta)), \\ -\Delta\Theta &= -\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z \ (\equiv f_2(\Psi,\Theta)) \ \text{in} \ \ 0<z<\pi, \\ \Psi = 0, & \quad \Psi_{zz} = 0, \quad \Theta = 0 \qquad \text{on} \ \ z = 0,\ \pi. \end{cases} \tag{1}$$

ここに, Ψ, Θ は, それぞれ流速の流れ関数および温度に対応し, $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ は, それぞれ Prandtl 数および Rayleigh 数であり, 考える領域は $\{-\infty < x < \infty,\ 0 < z < \pi\}$ である.

いま, 想定した境界条件から (1) の解 Ψ, Θ の形を次のように仮定して考える.

$$\begin{cases} \Psi &= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin(amx)\sin(nz), \\ \Theta &= \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\cos(amx)\sin(nz). \end{cases} \tag{2}$$

ここに, $a = 1/\sqrt{2}$.

いま, $u = (\Psi, \Theta)$, $f(u) = (f_1(\Psi,\Theta), f_2(\Psi,\Theta))$ とおくと, f は, $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ への連続写像である. ただし $\Omega \equiv (0, \frac{2\pi}{a})\times(0,\pi)$. したがって, 写像 $K \equiv (\mathcal{P}^{-1}(\Delta^2)^{-1}, (-\Delta)^{-1})$: $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \to H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ の compact 性より, 合成写像 $F \equiv Kf$ は $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上の compact 作用素. よって, (1) の解 $u = (\Psi,\Theta)$ は次の不動点問題の解として定式化され, Schauder の不動点定理が適用できる.

$$u = Fu \tag{3}$$

よって, [2] にもとづく数値的検証法の適用のために, 先ず近似空間として,

$$\begin{cases} S_N^{(1)} &\equiv \{\Psi_N \mid \Psi_N = \displaystyle\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\hat{A}_{mn}\sin(amx)\sin(nz)\}, \\ S_N^{(2)} &\equiv \{\Theta_N \mid \Theta_N = \displaystyle\sum_{m=0}^{M_2}\sum_{n=1}^{N_2}\hat{B}_{mn}\cos(amx)\sin(nz)\} \end{cases} \tag{4}$$

を用意する.

いま, $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ に対し, 与えられた境界条件のもとでの

$$\begin{cases} \mathcal{P}\Delta^2\bar{\Psi} &= g_1, \\ (-\Delta)\bar{\Theta} &= g_2 \end{cases} \tag{5}$$

の解 $\bar{\Psi}$ および $\bar{\Theta}$ のそれぞれ $S_N^{(1)}$ および $S_N^{(2)}$ への projection を, 次で定義する.

$$\begin{cases} (\mathcal{P}\Delta^2 P_N^{(1)}\bar{\Psi}, v_N^{(1)}) &= (g_1, v_N^{(1)}) \quad {}^\forall v_N^{(1)} \in S_N^{(1)}, \\ (-\Delta P_N^{(2)}\bar{\Theta}, v_N^{(2)}) &= (g_2, v_N^{(2)}) \quad {}^\forall v_N^{(2)} \in S_N^{(2)}. \end{cases} \tag{6}$$

さて, projection $P_N : H^3(\Omega) \times H^1(\Omega) \to S_N^{(1)} \times S_N^{(2)}$ を, $P_N \equiv (P_N^{(1)}, P_N^{(2)})$ で定義すれば, 不動点方程式 (3) はいつものように, 有限次元 (projection) と無限次元 (error) とに分けて

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_N u & = & P_N F u, \\ (I - P_N)u & = & (I - P_N)Fu \end{array} \right. \tag{7}$$

と書くことができる.

したがって, その構成的 a priori 誤差評価が得られればよい.

いま, $P_N^{(1)}\bar{\Psi}$ および $P_N^{(2)}\bar{\Theta}_N$ は, それぞれ (2) の形をした $\bar{\Psi}$ の (M_1, N_1)-truncation および $\bar{\Theta}_N$ の (M_2, N_2)-truncation に一致することに注意すれば, 容易に次の誤差評価を得る.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ||\bar{\Psi} - P_N^{(1)}\bar{\Psi}||_{H^3} & \equiv & \{||\Delta(\bar{\Psi} - P_N^{(1)}\bar{\Psi})_x||_{L^2}^2 + ||\Delta(\bar{\Psi} - P_N^{(1)}\bar{\Psi})_z||_{L^2}^2\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & \dfrac{5}{6\mathcal{P}} \dfrac{1}{N+1} ||g_1||_{L^2}, \\ ||\bar{\Theta} - P_N^{(2)}\bar{\Theta}||_{H^1} & \equiv & ||\nabla(\bar{\Theta} - P_N^{(2)}\bar{\Theta})||_{L^2} \\ & \leq & \dfrac{2}{3} \dfrac{1}{N+1} ||g_2||_{L^2}. \end{array} \right. \tag{8}$$

ただし, 上記は $M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = N$ の場合である. 他のノルム評価 (L^2, H^2 etc.) も同様にして得られる. さらに, 埋めこみ $H^2 \hookrightarrow L^2$ の構成的評価を用いることにより, 途中計算に必要な L^∞ 誤差評価も得ることができる.

また, (1) の近似解としては, 次の非線形方程式の解 $(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N) \in S_N^{(1)} \times S_N^{(2)}$ を用いる.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (\mathcal{P}\Delta^2\hat{\Psi}_N, v_N^{(1)}) & = & (f_1(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), v_N^{(1)}) & {}^\forall v_N^{(1)} \in S_N^{(1)}, \\ (-\Delta\hat{\Theta}_N, v_N^{(2)}) & = & (f_2(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), v_N^{(2)}) & {}^\forall v_N^{(2)} \in S_N^{(2)}. \end{array} \right. \tag{9}$$

いま, (6) で, $g_1 = f_1(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N)$ および $g_2 = f_2(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N)$ とおいたときの解をそれぞれ $\bar{\Psi}$ および $\bar{\Theta}$ として, $v_0^{(1)} \equiv \bar{\Psi} - \hat{\Psi}_N$, $v_0^{(2)} \equiv \bar{\Theta} - \hat{\Theta}_N$ とおく. (1) の解は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = \hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + \Psi_{1N} + \alpha_1, \\ \Theta = \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + \Theta_{1N} + \beta_1 \end{array} \right. \tag{10}$$

の形に書き換え, 残差形になおして Newton タイプの作用素を用いて定式化される [2]. ここに, Ψ_{1N} および Θ_{1N} は有限次元部分を表す変数であり, α_1 および β_1 は無限次元部分に対応する. 詳細は講演時に述べる.

Reference

[1] T. Nishida and H. Yoshihara, Heat convection with a stress free boundary condition and bifurcation problems, 1997 年度応用数学合同研究集会予稿集, 371-372.

[2] 中尾充宏・山本野人, 「精度保証付き数値計算」, 日本評論社, 1998.