熱対流問題の分岐解の数値的検証について

中尾 充宏, 山本 野人, 木村 誠二 †,
渡部 善隆 ‡, 西田 孝明 *

†九州大学大学院数理学研究科　‡九州大学大型計算機センター
*京都大学大学院理学研究科

[1] Takaaki Nishida and Hideaki Yoshihara:
Heat convection with a stress free boundary condition and bifurcation problems,
応用数学合同研究集会報告集, pp.371–372 (1997).

[2] 中尾 充宏, 山本 野人:
『精度保証付き数値計算 ~ コンピュータによる無限への挑戦 ~ 』,
チュートリアル：応用数理の最前線, 日本評論社, 1998.
ISBN4-535-78258-X, 3000 円 + 税

Slide 1

定常熱対流問題

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{P}\Delta^2\Psi &= \mathcal{P}\mathcal{R}\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z, \\ -\Delta\Theta &= -\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z & \text{in} \quad 0 < z < \pi, \\ \Psi &= 0, \quad \Psi_{zz} = 0, \quad \Theta = 0 & \text{on} \quad z = 0, \pi. \end{cases}$$

$\Psi(x,z)$: 流体の流れ関数 (stream function),
$\Theta(x,z)$: 流体の温度,
$\mathcal{P}$: Prandtl 数 $(1 < \mathcal{P} < 10)$,
$\mathcal{R}$: Rayleigh 数 $(\mathcal{R} > 6.75)$,
領域 : $\{-\infty < x < \infty,\ 0 < z < \pi\}$.

●境界条件
流れ関数 Ψ ··· stress free on $\{-\infty < x < \infty,\ z = 0,\ z = \pi\}$,
温度 Θ ··· Dirichlet 境界条件,
x 方向 ··· 周期境界条件.

Slide 2

スペクトル法

想定した境界条件から (1) を満たす Ψ, Θ の形を次のように仮定する:

$$(2)\quad \begin{cases} \Psi(x,z) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin(amx)\sin(nz), \\ \Theta(x,z) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\cos(amx)\sin(nz). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_1(\Psi,\Theta) &:= \mathcal{P}\mathcal{R}\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z, \\ f_2(\Psi,\Theta) &:= -\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z, \\ u &:= (\Psi,\Theta), \\ f(u) &:= (f_1(\Psi,\Theta), f_2(\Psi,\Theta)), \\ \Omega &:= (0,\frac{2\pi}{a})\times(0,\pi). \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

1. f は $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ への連続写像,
2. 有界集合 $U \subset H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ に対し，$f(U)$ は $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ で有界．

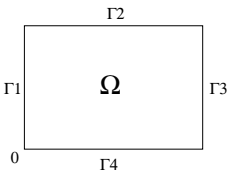
Slide 3

不動点定式化

$g_1,\ g_2 \in L^2(\Omega)$ に対し

$$(3)\quad \begin{cases} \mathcal{P}\Delta^2\bar{\Psi} = & g_1 & \text{in} & \Omega, \\ \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{zz} = & 0 & \text{on} & \partial\Omega, \\ \bar{\Psi}(0,z) = & \bar{\Psi}(\frac{2\pi}{a},z), & & \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} -\Delta\bar{\Theta} = & g_2 & \text{in} & \Omega, \\ \bar{\Theta} = & 0 & \text{on} & \Gamma 2, \Gamma 4, \\ \bar{\Theta}(0,z) = & \bar{\Theta}(\frac{2\pi}{a},z), & & \end{cases}$$



は一意の解 $\bar{\Psi} \in H^4(\Omega)$, $\bar{\Theta} \in H^2(\Omega)$ を持つ．さらに $\bar{\Psi}$ を $H^3(\Omega)$ に，$\bar{\Theta}$ を $H^1(\Omega)$ に埋め込むまでの対応関係をそれぞれ $\mathcal{P}^{-1}(\Delta^2)^{-1}$, $(-\Delta)^{-1}$ で定義する．

$$K := (\mathcal{P}^{-1}(\Delta^2)^{-1}, (-\Delta)^{-1}) : L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \to H^3(\Omega)\times H^1(\Omega) \text{ compact},$$

$$F := Kf : H^3(\Omega)\times H^1(\Omega) \to H^3(\Omega)\times H^1(\Omega) \quad \text{compact}.$$

よって (1) の解 $u = (\Psi,\Theta)$ は不動点問題

$$u = Fu$$

の解として定式化され, Schauder の不動点定理が適用できる.

Slide 4

近似空間と projection

●近似空間

$$\begin{cases} S_N^{(1)} & := \{\Psi_N \mid \Psi_N = \displaystyle\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1} \hat{A}_{mn}\sin(amx)\sin(nz)\}, \\ S_N^{(2)} & := \{\Theta_N \mid \Theta_N = \displaystyle\sum_{m=0}^{M_2}\sum_{n=1}^{N_2} \hat{B}_{mn}\cos(amx)\sin(nz)\}. \end{cases}$$

• projection

$g_1,\ g_2 \in L^2(\Omega)$, (3), (4) の解

$$\bar{\Psi} = \mathcal{P}^{-1}(\Delta^2)^{-1}g_1, \qquad \bar{\Theta} = (-\Delta)^{-1}g_2$$

の近似空間への projection $P_N^{(1)}\bar{\Psi} \in S_N^{(1)},\ P_N^{(2)}\bar{\Theta} \in S_N^{(2)}$ を次で定義:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\,\Delta^2 P_N^{(1)}\bar{\Psi}, v_N^{(1)}\,)_{L^2(\Omega)} &=& (\,g_1, v_N^{(1)}\,)_{L^2(\Omega)} & \forall v_N^{(1)} \in S_N^{(1)}, \\ -(\,\Delta P_N^{(2)}\bar{\Theta}, v_N^{(2)}\,)_{L^2(\Omega)} &=& (\,g_2, v_N^{(2)}\,)_{L^2(\Omega)} & \forall v_N^{(2)} \in S_N^{(2)}. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$P_N^{(1)}\bar{\Psi},\ P_N^{(2)}\bar{\Theta}$ は，それぞれ $\bar{\Psi}$ の (M_1, N_1)-truncation および $\bar{\Theta}$ の (M_2, N_2)-truncation に一致．

構成的 a priori 誤差評価

$M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = N$,

$$\begin{cases} \|\bar{\Psi} - P_N^{(1)}\bar{\Psi}\|_{H^s(\Omega)} &\le& C_s^{(1)}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)^{4-s}\|g_1\|_{L^2(\Omega)} & s = 0,1,2,3, \\ \|\bar{\Theta} - P_N^{(2)}\bar{\Theta}\|_{H^t(\Omega)} &\le& C_t^{(2)}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)^{2-t}\|g_2\|_{L^2(\Omega)} & t = 0,1. \end{cases}$$

$C_s^{(1)},\ C_t^{(2)} > 0$ は (ノルムの定義に応じて) 数値的に評価可能な定数．

○ **Example**

$$\|\bar{\Psi} - P_N^{(1)}\bar{\Psi}\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\mathcal{P}}\left(\frac{1}{a^2+1}\right)^2\left(\frac{1}{N+1}\right)^4\|g_1\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\nabla(\bar{\Theta} - P_N^{(2)}\bar{\Theta})\|_{L^2(\Omega)} \le \left(\frac{2}{a^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{N+1}\|g_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

《具体的な a に対しては更によい評価が可能》

また，埋めこみ $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ の構成的評価を用いることにより，途中計算に必要な L^∞ 誤差評価も得ることができる.

残差引き戻し

•近似解 $(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N) \in S_N^{(1)} \times S_N^{(2)}$:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{P}(\Delta^2\hat{\Psi}_N, v_N^{(1)})_{L^2(\Omega)} &= (f_1(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), v_N^{(1)})_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v_N^{(1)} \in S_N^{(1)}, \\ -(\Delta\hat{\Theta}_N, v_N^{(2)})_{L^2(\Omega)} &= (f_2(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), v_N^{(2)})_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v_N^{(2)} \in S_N^{(2)}. \end{cases}$$

•引き戻し

$$\begin{cases} \bar{\Psi} := \mathcal{P}^{-1}(\Delta^2)^{-1} f_1(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), & v_0^{(1)} := \bar{\Psi} - \hat{\Psi}_N, \\ \bar{\Theta} := (-\Delta)^{-1} f_2(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), & v_0^{(2)} := \bar{\Theta} - \hat{\Theta}_N, \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (1) は次の残差形に書ける:

$$(6)\begin{cases} \mathcal{P}\Delta^2 w^{(1)} = f_1(\hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + w^{(1)}, \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + w^{(2)}) - f_1(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta w^{(2)} = f_2(\hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + w^{(1)}, \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + w^{(2)}) - f_2(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N) & \text{in } \Omega, \\ w^{(1)} = w_{zz}^{(1)} = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega, \quad w^{(1)}(0,z) = w^{(1)}(\dfrac{2\pi}{a}, z), \\ w^{(2)} = 0 \ \text{ on } \ \Gamma 2, \Gamma 4, \quad w^{(2)}(0,z) = w^{(2)}(\dfrac{2\pi}{a}, z). \end{cases}$$

$$\psi = \hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + w^{(1)}, \qquad \theta = \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + w^{(2)}.$$

Slide 7

Newton-like Method

$w := (w^{(1)}, w^{(2)})$,

$$\begin{cases} h_1(w) := f_1(\hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + w^{(1)}, \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + w^{(2)}) - f_1(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), \\ h_2(w) := f_2(\hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + w^{(1)}, \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + w^{(2)}) - f_2(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), \end{cases}$$

$h(w) := (h_1(w), h_2(w))$, $\quad \hat{w}_N := (\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N)$,

$P_N := (P_N^{(1)}, P_N^{(2)}) : H^3(\Omega) \times H^1(\Omega) \to S_N^{(1)} \times S_N^{(2)}$,

$F := Kh$.

$$w = Fw \Longleftrightarrow \begin{cases} P_N w = P_N F w, \\ (I - P_N)w = (I - P_N)Fw, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} P_N w = P_N w - [I - P_N K f'(\hat{w}_N)]_N^{-1} P_N (I - F) w, \\ (I - P_N)w = (I - P_N)Fw, \end{cases}$$

$Tw := P_N w - [I - P_N K f'(\hat{w}_N)]_N^{-1} P_N (I - F) w + (I - P_N) F w$,

$(6) \Longleftrightarrow w = Tw$.

Slide 8

Computable Verification Condition

$$\begin{cases} w_N^{(1)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{L_1} a_i \sin(am(i)x)\sin(n(i)z) \in S_N^{(1)}, \\ w_N^{(2)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{L_2} b_i \cos(am(i)x)\sin(n(i)z) \in S_N^{(2)}, \end{cases}$$

$\dim S_N^{(1)} = L_1, \quad \dim S_N^{(2)} = L_2, \quad (w_N^{(1)})_i := |a_i|, \quad (w_N^{(2)})_{i+L_1} := |b_i|.$

• Candidate Set

$M := N_1 + N_2$, using $W_i > 0$ $(1 \le i \le M+2)$,

$W_N := \{(w_N^{(1)}, w_N^{(2)}) \in S_N^{(1)} \times S_N^{(2)} \mid (w_N^{(j)})_i \le W_i \quad 1 \le i \le M\}$,

$W^* := \{(w_1, w_2) \in (S_N^{(1)})^\perp \times (S_N^{(2)})^\perp \mid \|w_1\|_{H^3(\Omega)} \le W_{M+1}, \|w_2\|_{H^1(\Omega)} \le W_{M+2}\}$,

$W := W_N \oplus W^* \subset H^3(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Theorem(Verification Condition)

$$\begin{cases} P_N T(W) & \subset & W_N, \\ (I - P_N)F(W) & \subset & W^*, \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ there exists a fixed point w of $\hat{F}$ in W.

Computer Algorithm

$k \ge 1$

$\bar{W}_i^{(k-1)} := W_i^{(k-1)}(1+\delta), \qquad \bar{W}^{(k-1)} = \bar{W}_N^{(k-1)} \oplus \bar{W}^{*(k-1)}.$

$$\begin{cases} W_N^{(k)} & := & P_N T(\bar{W}^{(k-1)}), \\ W_{M+1}^{(k)} & := & C_3^{(1)} \displaystyle\sup_{w \in \bar{W}^{(k-1)}} \|h_1(w)\|_{L^2(\Omega)}, \\ W_{M+2}^{(k)} & := & C_1^{(2)} \displaystyle\sup_{w \in \bar{W}^{(k-1)}} \|h_2(w)\|_{L^2(\Omega)}, \end{cases}$$

$W^{(k)} := W_N^{(k)} \oplus W^{*(k)}$.

Theorem(Verification Condition)

If, for a step K, $W_i^{(K)} < \bar{W}_i^{(K-1)} \quad 1 \le \forall i \le M+2$ hold, then in the set $\bar{W}^{(K-1)} = \bar{W}_N^{(K-1)} \oplus \bar{W}^{*(K-1)} \subset H^3(\Omega) \times H^1(\Omega)$ constructed by $\{\bar{W}_i^{(K-1)}\}_{1 \le i \le M+2}$, there exists an element w satisfying $w = Tw$.

$w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \Longrightarrow \psi = \hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + w^{(1)}, \quad \theta = \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + w^{(2)}.$

数値例 I

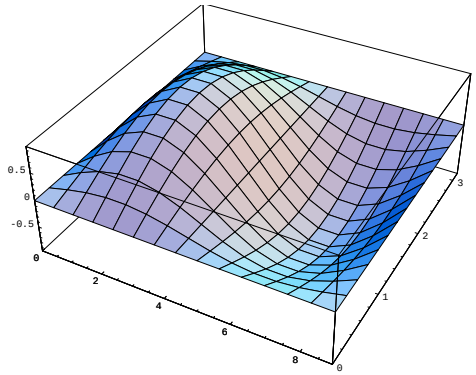
$\mathcal{P} = 1, \quad \mathcal{R} = 7, \quad a = 1/\sqrt{2}.$

●近似解 $U_N := (\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N)$; 64 ビット浮動小数点演算 (IEEE754).

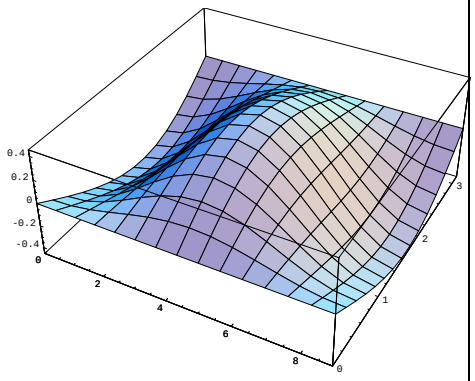
有限次元の非線形方程式 $\tilde{F}(U_N) = 0$ に対し Newton 法を適用:

$$U_N^{(k)} = U_N^{(k-1)} - \tilde{F}'(U_N^{(k-1)})^{-1}\tilde{F}(U_N^{(k-1)}) \quad (k \geq 1)$$

収束判定条件: $\min\{\ \|U_N^{(k)} - U_N^{(k-1)}\|_\infty / \|U_N^{(k-1)}\|_\infty,\ \|\tilde{F}(U_N^{(k)})\|_\infty\ \} < 10^{-15}.$



$\hat{\Psi}_N$ の形状; $\|\hat{\Psi}_N\|_\infty \approx 0.94568.$



$\hat{\Theta}_N$ の形状; $\|\hat{\Theta}_N\|_\infty \approx 0.42987.$

Slide 11

数値例 II

●仮定

- $m + n$: 偶数で基底を張る．
- 近似解 $U_N = (\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N)$ は有限次元の非線形方程式 (5) の解．
- $\|v_0^{(1)}\|_{L^2}, \|v_0^{(2)}\|_{L^2} \leq 10^{-6}$
- 行列 $[I - P_N K f'(\hat{w}_N)]_N^{-1}$ はある区間行列の要素として数値的に決定できる．

●検証結果

$M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = 50$; 反復回数: 42.

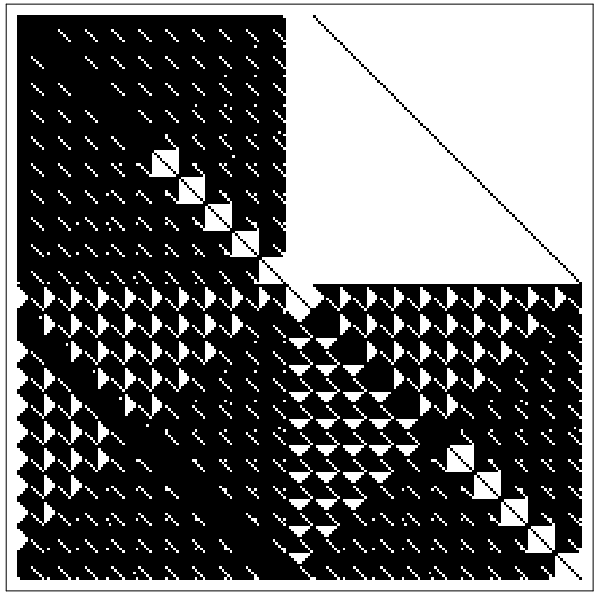
$$\begin{cases} \psi = \ \hat{\Psi}_N + v_0^{(1)} + w_N^{(1)} + w_1 \in H^3(\Omega), \\ \theta = \ \hat{\Theta}_N + v_0^{(2)} + w_N^{(2)} + w_2 \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w_N^{(1)} &\in S_N^{(1)}; \quad \|w_N^{(1)}\|_\infty \leq 1.9082 \times 10^{-6}, \\ w_N^{(2)} &\in S_N^{(2)}; \quad \|w_N^{(2)}\|_\infty \leq 8.4028 \times 10^{-6}, \\ w_1 &\in (S_N^{(1)})^\perp; \quad \|w_1\|_{H^3} \leq C_3^{(1)} \times 1.8655 \times 10^{-5}, \\ w_2 &\in (S_N^{(2)})^\perp; \quad \|w_2\|_{H^1} \leq C_1^{(2)} \times 6.1882 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Slide 12

行列の形状

$[I - P_N K f'(\hat{w}_N)]_N$;　$M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = 10$;　$\square = 0$, $\blacksquare \neq 0$.



Slide 13