Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価

中尾 充宏 † 山本 野人 † 渡部 善隆 ‡

† 九州大学大学院数理学研究科 ‡ 九州大学大型計算機センター

1 introduction

我々は [7] において，Stokes 方程式の弱解の存在を保証する条件である inf-sup condition に関わる定数を数値評価することによって，厳密な意味での a posteriori 誤差の数値的保証を与えた．また，[8] において，a posteriori 誤差評価と同様な手法を用いることにより，Stokes 方程式の有限要素解に対する構成的 a priori 誤差評価が得られることを示した．

本稿では，[7], [8] により得られた速度に関する H_0^1 誤差評価に対し，Poisson 方程式に対する Aubin-Nitsche trick (cf. [2], [6]) に似た手法を適用することで，Stokes 方程式の有限要素解に対する L^2 誤差評価を導く．さらに，幾つかの数値例により，Stokes 版 Aubin-Nitsche trick が期待される order を与えることを確認する．

次の同次境界条件を持つ Stokes 問題を考える:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \text{in} & \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in} & \Omega, \\ u = 0 & \text{on} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の凸多角形，$u = (u_1, u_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$ は 2 次元ベクトル値関数, $\nu > 0$ である．なお，以下 "T" は転置記号とする．$H^k(\Omega)$ を通常の k 次 Sobolev 空間とし，関数空間を以下で定義する．

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\equiv \{v \in H^1(\Omega)\ ;\ v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ L_0^2(\Omega) &\equiv \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ \int_\Omega v\, dx\, dy = 0\}, \\ \mathcal{S} &\equiv H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

さらに $(\cdot, \cdot)$ を Ω 上の L^2- 内積とし，$L^2(\Omega)$-norm $|\cdot|_0$ を $|v|_0 = (v, v)^{1/2}$ で，$H_0^1(\Omega)$-seminorm $|\cdot|_1$ を $|v|_1 = |\nabla v|_0$ であらわす．このとき，$\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ 上の bilinear form $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}([u, p], [v, q]) \equiv \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) - (q, \operatorname{div} u) \qquad [u, p],\ [v, q] \in \mathcal{S}. \tag{1.2}$$

で定義するとき，Stokes 方程式 (1.1) は同値な次の問題に置き換えられる :

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad [u, p] \in \mathcal{S} \quad \text{such that} \\ &\mathcal{L}([u, p], [v, q]) = (f, v) \qquad \forall [v, q] \in \mathcal{S}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

よく知られているように，(1.3) は $\mathcal{S}$ 内に一意解を持つ．

2　有限要素解と a posteriori/a priori 誤差評価

$\mathcal{T}_h$ を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の三角形または四角形分割，h を $\mathcal{T}_h$ の scale parameter とする．$h > 0$ は領域の分割幅を通常表す．次に，$X_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を速度場 u の各成分を近似する有限要素部分空間，$Y_h \subset L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を圧力場 p を近似する有限要素部分空間とする．また，X_h^* を X_h の基底に境界上の node に対応する基底を付け加えたもので張られる空間とおく．

続いて，P_0 を $L^2(\Omega)$ から X_h への L^2-projection，$\hat{P}_0$ を $L^2(\Omega)$ から X_h^* への L^2-projection とする．さらに，$w_h \in X_h$ に対し，$\overline{\nabla} w_h \in (X_h^*)^2$，$\overline{\Delta} w_h \in L^2(\Omega)$ を次で定義する：

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla} w_h &\equiv (\hat{P}_0 \frac{\partial w_h}{\partial x}, \hat{P}_0 \frac{\partial w_h}{\partial y}), \\
\overline{\Delta} w_h &\equiv \operatorname{div}(\overline{\nabla} w_h) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{P}_0 \frac{\partial w_h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{P}_0 \frac{\partial w_h}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

(1.3) の離散解は次で与える：

$$
\begin{aligned}
&\text{find} \quad [u_h, p_h] \in X_h^2 \times Y_h \quad \text{such that} \\
&\mathcal{L}([u_h, p_h], [v_h, q_h]) = (f, v_h) \qquad \forall [v_h, q_h] \in X_h^2 \times Y_h.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

また，X_h の近似性として次を仮定する：

$$
\inf_{\xi \in X_h} |v - \xi|_1 \le C_0 h |v|_2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{2.2}
$$

ただし，C_0 は数値的に算定可能な正定数，$|\cdot|_2$ は Ω 上の H^2-seminorm とする．仮定 (2.2) は，一般の有限要素空間で成立することが知られている．また，C_0 が数値的に決められるような X_h の例は多い．例えば，1 次元の区分 1 次要素の空間では $C_0 = 1/\pi$ となる．また，1 次元の区分 2 次要素のテンソル積として定義される 2 次元矩形要素では，一様メッシュの場合 $C_0 = 1/(2\pi)$，また，三角形一様分割の区分 1 次要素では $C_0 \le 0.81$ となることがいえる．

このとき，[7] より，Stokes 方程式に対する a posteriori 誤差評価が以下のように成り立つ．

Theorem 2.1 (a posteriori error estimate)

$$
C(u_h, p_h) \equiv \nu |\overline{\nabla} u_h - \nabla u_h|_0 + C_0 h |\nu \overline{\Delta} u_h - \nabla p_h + f|_0 + |\operatorname{div} u_h|_0 \tag{2.3}
$$

とおくとき，Stokes 方程式 (1.3) の解 $[u, p]$ と，(2.1) をみたす有限要素近似解 $[u_h, p_h]$ に対し，次の a posteriori 誤差評価が成立する:

$$
\begin{cases}
|u - u_h|_1 \le \left(\dfrac{1}{\nu^2} + \dfrac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} C(u_h, p_h), \\
|p - p_h|_0 \le \left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{\nu}{\beta^2} \right) C(u_h, p_h).
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

ここで，$\beta > 0$ は領域 Ω にのみ依存する定数であり，数値的に算定可能であるとする．実際，Ω が正方領域の場合は $1/\beta < 2.614$ となる．

次に，$f \in L^2(\Omega)^2$ に対し，$P_0 f \in X_h^2$ を成分毎の L^2-projection として

$$
P_0 f = (P_0 f_1, P_0 f_2)^T
$$

で定義する．また，正定数 K_1, K_2 が f に依らずに決まり，

$$
|\operatorname{div} u_h|_0 \le K_1 |P_0 f|_0, \tag{2.5}
$$

$$
|-\nabla p_h + P_0 f|_0 \le K_2 |P_0 f|_0, \tag{2.6}
$$

を満足するとする (具体的な $K_1,\ K_2$ の構成方法は [8] を参照)．このとき，[8] より，Stokes 方程式に対する a priori 誤差評価が以下のように成り立つ．

Theorem 2.2 (a priori error estimate) f に依らない正数

$$C(h) \equiv \sqrt{(K_1 + C_0 h K_2)^2 + (C_0 h)^2}. \tag{2.7}$$

を用いて，次の誤差評価が成り立つ：$\forall f \in L^2(\Omega)^2$,

$$\begin{cases} |u - u_h|_1 \le \left(\dfrac{1}{\nu^2} + \dfrac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} C(h)\,|f|_0, \\ |p - p_h|_0 \le \left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{\nu}{\beta^2}\right) C(h)\,|f|_0. \end{cases} \tag{2.8}$$

3 Stokes 方程式版 Aubin-Nitsche trick

ここでは，Theorem 2.1, Theorem 2.2の結果に Aubin-Nitsche trick に似た手法を適用することにより，速度に関する L^2 誤差評価 $|u - u_h|_0$ を導く．

(1.3) と (2.1) の解をそれぞれ $[u, p]$, $[u_h, p_h]$ とおき，$u - u_h$ に対する Stokes 方程式

$$\begin{cases} -\nu\Delta\phi + \nabla\psi = & u - u_h & \text{in} & \Omega, \\ \operatorname{div}\phi = & 0 & \text{in} & \Omega, \\ \phi = & 0 & \text{on} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

を考える．(3.1) と部分積分より

$$\begin{aligned} (\,u - u_h, u - u_h\,) &= (\,u - u_h, -\nu\Delta\phi + \nabla\psi\,) \\ &= (\,\nabla(u - u_h), \nabla\phi\,) + (\,\operatorname{div} u_h, \psi\,). \end{aligned} \tag{3.2}$$

一方，任意の $v_h \in X_h^2$, $q_h \in Y_h$ に対し，$[u, p]$ は (1.3) の解であることから

$$\nu(\,\nabla u, \nabla v_h\,) - (\,p, \operatorname{div} v_h\,) = (\,f, v_h\,). \tag{3.3}$$

また，$[u_h, p_h]$ は (2.1) の解であることから

$$\nu(\,\nabla u_h, \nabla v_h\,) - (\,p_h, \operatorname{div} v_h\,) - (\,q_h, \operatorname{div} u_h\,) = (\,f, v_h\,). \tag{3.4}$$

よって (3.3), (3.4) より

$$\nu(\,\nabla(u - u_h), \nabla v_h\,) + (\,q_h, \operatorname{div} u_h\,) - (\,p - p_h, \operatorname{div} v_h\,) = 0 \tag{3.5}$$

を得る．従って，(3.3), (3.5) と Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} (\,u - u_h, u - u_h\,) &= \nu(\,\nabla(u - u_h), \nabla(\phi - v_h)\,) + (\,\psi - q_h, \operatorname{div} u_h\,) + (\,p - p_h, \operatorname{div} v_h\,) \\ &\le \nu|u - u_h|_1\,|\phi - v_h|_1 + |\operatorname{div} u_h|_0\,|\psi - q_h|_0 + |p - p_h|_0\,|\operatorname{div} v_h|_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

が導かれる．

ここで $v_h \in X_h^2$, $q_h \in Y_h$ を特に (3.1) の有限要素近似解として選ぶ．このとき，Theorem 2.2 より直ちに

$$|\phi - v_h|_1 \le \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} C(h)\,|u - u_h|_0, \tag{3.7}$$

$$|\psi - q_h|_0 \le \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\nu}{\beta^2}\right) C(h)\,|u - u_h|_0, \tag{3.8}$$

$$|\operatorname{div} v_h|_0 \le K_1 |u - u_h|_0 \tag{3.9}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} C(h), \\ C_2 &\equiv \left(\frac{1}{\beta}+\frac{\nu}{\beta^2}\right) C(h), \end{aligned}$$

と定めることにより，(3.6), (3.7), (3.8) および (3.9) から $u-u_h$ に対する L^2 誤差評価が以下の通り得られる．

Theorem 3.1　Stokes 方程式 (1.3) の解 $[u,p]$ と，(2.1) をみたす有限要素近似解 $[u_h,p_h]$ に対し，次の誤差評価が成立する:

$$|u-u_h|_0 \le \nu C_1 |u-u_h|_1 + C_2 |\mathrm{div}\, u_h|_0 + K_1 |p-p_h|_0. \tag{3.10}$$

(3.10) の右辺は，Theorem 2.1 により a posteriori に評価できる．また，(2.5) および Theorem 2.2 を用いることにより，以下の a priori L^2 誤差評価を得る．

Theorem 3.2　任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し，f によらない正数 $C_1,\ C_2,\ K_1$ により Stokes 方程式の有限要素解に対する a priori 誤差評価

$$|u-u_h|_0 \le (\nu C_1^2 + 2C_2K_1)|f|_0. \tag{3.11}$$

を得る．

4　Numerical Examples

領域 Ω は $(0,1)\times(0,1)$ の正方領域とし，Ω を矩形要素に等分割する．x(または y) 軸方向の分割数を N とおく．分割の parameter h は $h=1/N$ となる．有限要素空間 $X_h \subset H_0^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 2 次要素 (piecewise biquadratic) を用いる．また，$Y_h \subset L_0^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 1 次要素 (piecewise bilinear) を用いる．区分的 2 次の基底も，同じく 1 次元の区分 2 次要素のテンソル積で定義する．数値例として，定常 Navier-Stokes 方程式の有限要素近似解に対する residual form に関わる norm 評価を考える．定常 Navier-Stokes 方程式

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta u+\nabla p &=& -(u\cdot\nabla)u+f & \text{in}\quad \Omega, \\ \mathrm{div}\, u &=& 0 & \text{in}\quad \Omega, \\ u &=& 0 & \text{on}\quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4.1}$$

の弱形式に対する有限要素近似解 $[u_h,p_h]\in X_h^2\times Y_h$ を次を満たすように求める :

$$\begin{aligned} &\text{find}\ \ [u_h,p_h]\in X_h^2\times Y_h\ \ \text{such that} \\ &\mathcal{L}(\,[u_h,p_h],[v_h,q_h]\,) = -(\,(u_h\cdot\nabla)u_h,v_h\,)+(\,f,v_h\,) \qquad \forall [v_h,q_h]\in X_h^2\times Y_h. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(4.2) の解 $u_h\in X_h^2$ に対して Stokes 方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\nu\Delta\bar{u}+\nabla\bar{p} &=& -(u_h\cdot\nabla)u_h+f, \\ \mathrm{div}\,\bar{u} &=& 0, \end{array}\right. \tag{4.3}$$

を考える．このとき (4.3) に対する有限要素近似解は $[u_h,p_h]$ と一致する．ここで，$v_0\equiv\bar{u}-u_h\in H_0^1(\Omega)^2$ とおくと，v_0 は $-(u_h\cdot\nabla)u_h+f\in L^2(\Omega)^2$ に対する Stokes 方程式の誤差を意味し，explicit な形は不定であるが norm の定量的評価は可能である．我々は，v_0 の定量的 norm 評価により，

非線形楕円型方程式に対する解の存在検証に関する残差引き戻しの手法 ([6], [4]) が Navier-Stokes 方程式 (4.1) にも適用可能であり，解の存在検証条件を示すことができることを強調しておく．

数値例として $\nu = 1,\ f = (f_1, f_2)^2$ は

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \sin^2 \pi x \sin \pi y \cos \pi y \\ u_2(x,y) &= -\sin^2 \pi y \sin \pi x \cos \pi x \\ p(x,y) &= -\cos 2\pi x \cos 2\pi y/16 \end{aligned}$$

が解となるように選ぶ．$u_h \in X_h^2$ は Newton-like な手法を用い (4.2) を変形し，反復法により求めた．なお，打ち切りによって発生する誤差はここでは無視する．

近似解 u_h は最大値 norm として $||u_h||_\infty \approx 0.71,\ |-(u_h \cdot \nabla)u_h + f|_0 \approx 292.3$ である．

図 1 は (2.3) の第 1 項 $|\overline{\nabla} u_h - \nabla u_h|_0$ をプロットしたものである．

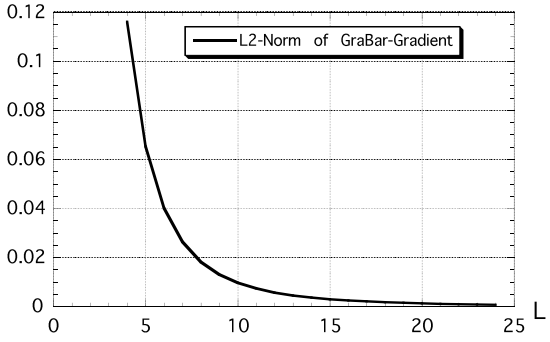

図 1:$|\overline{\nabla} u_h - \nabla u_h|_0$

図 2 は (2.3) の第 3 項 $|\mathrm{div}\, u_h|_0$ の値をプロットしたものである．

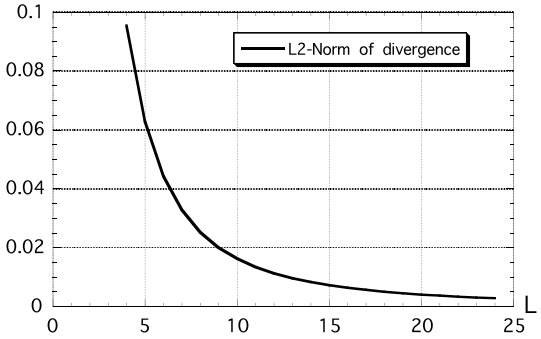

図 2:$|\mathrm{div}\, u_h|_0$

図 3 は (2.3) の第 2 項 $|\overline{\Delta} u_h - \nabla p_h - (u_h \cdot \nabla)u_h + f|_0$ の値を表す．

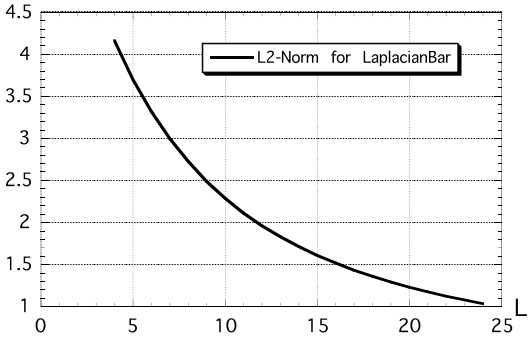

図 3:$|\overline{\Delta} u_h - \nabla p_h - (u_h \cdot \nabla)u_h + f|_0$

図 4 は $|v_0|_1$, $|v_0|_0$ の値を a posteriori, a priori 評価した図を表す．

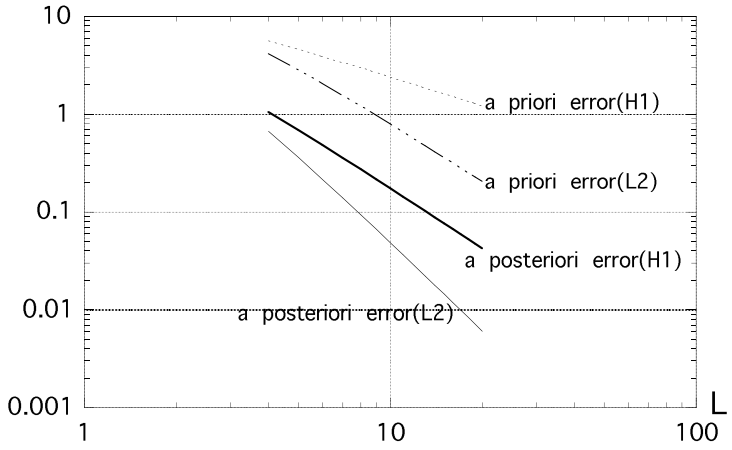

図 4:$|v_0|_1$, $|v_0|_0$

概算の order は以下の通り

a priori estimate of $\|v_0\|_1$	$\sim$	$O(h^{0.98})$
a priori estimate of $\|v_0\|_0$	$\sim$	$O(h^{1.95})$
a posteriori estimate of $\|v_0\|_1$	$\sim$	$O(h^{2.04})$
a posteriori estimate of $\|v_0\|_0$	$\sim$	$O(h^{3.00})$

数値計算は FUJITSU VP2600/10，言語は Fortran，精度は倍精度計算で行なった．もちろん，数値結果には丸め誤差が混入しているため，正確な a priori 評価を得るためには有理数演算，または精度保証付きソフトウェアでの計算が必要である．

参考文献

[1] Bank, R. E., Welfert, B. D. : A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**, 591–623 (1991).

[2] Ciarlet P. G. : *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[3] Grisvard, P. : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985).

[4] Nakao M. T. : Solving Nonlinear Elliptic Problems with Result Verification Using an H^{-1} Type Residual Iteration, *Computing, Suppl.* **9**, 161–173 (1993).

[5] Yamamoto, N., Nakao, M. T. : Numerical Verifications of Solutions for Elliptic Equations in Nonconvex Polygonal Domains, *Numer. Math.*, **65**, 503–521 (1993).

[6] Yamamoto, N., Nakao, M. T. : Numerical Verifications for Solutions to Elliptic Equations using Residual Iterations with a Higher Order Finite Element, *J. Comput. Appl. Math.*, **60**, 271–279 (1995).

[7] 渡部 善隆, 山本 野人, 中尾 充宏 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価, 短期共同研究・数値計算における品質保証とその応用 – 感度解析から証明まで –, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.928 (1995) pp.20–31.

[8] 渡部 善隆, 山本 野人, 中尾 充宏 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a priori 誤差評価, 科学技術における数値計算の理論と応用, 京都大学数理解析研究所 (1995).