分岐を伴う非線形楕円型方程式の数値的検証法

渡部善隆・中尾充宏 (九州大学・理学部)

次の問題を考える．

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda u(u-a)(1-u) & \text{in} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{on} \ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\begin{array}{rcl} \Omega & : & \text{bounded convex domain in } \mathbf{R}^n \ \ (1 \le n \le 3) \\ \partial\Omega & : & \text{piecewice smooth boundary} \\ & & \lambda, a \in \mathbf{R} \end{array}$$

まず，問題の不動点形式化を行う．作用素 G を 逆ラプラス作用素，$f = u(u-a)(1-u)$ として，$F \equiv G\lambda f$ とおくと F は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への compact 作用素として定義される．この時，(1) の弱形式は，不動点形式 $u = Fu$ に表わせる．

次に，S_h を パラメータ h ($0 < h < 1$) に依存する $H_0^1(\Omega)$ の有限要素部分空間，P_h を $H_0^1(\Omega)$ から S_h への $H_0^1(\Omega)$ の意味での直交射影 ($H_0^1 - projection$) とする．F の Fréchet 微分を F'，$u_h \in S_h$ を (1) の近似解とする．ここで，写像 $P_h(I - F'(u_h)) \ : \ H_0^1(\Omega) \to S_h$ を S_h に制限したものは，逆作用素 $[I - F'(u_h)]_h^{-1} \ : \ S_h \to S_h$ をもつと仮定する．ε を $0 < \varepsilon < 1$ なる微小なパラメータとし，非線形作用素 $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ を次式で定義する．

$$Tu \equiv \{ \ I - (\ [\ I - F'(u_h) \ ]_h^{-1} P_h + \varepsilon I \ )(\ I - F \ ) \ \} u \tag{2}$$

この時 $[\ I - F'(u_h) \ ]_h^{-1} P_h + \varepsilon I$ が逆作用素を持てば，二つの不動点問題 $u = Fu$ と $u = Tu$ は同値となる．さらに，作用素 T は，condensing operator であるので，$H_0^1(\Omega)$ の空でない有界凸閉集合 U に対し $TU \subset U$ ならば，Sadovskii の不動点定理によって U の中に T の不動点が存在する．また $[I - F'(u_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I$ が可逆ならば，この不動点は，F の不動点となる．

次に，$\tilde{T}u \ \equiv \ \{\tilde{I} - ([\ I - F'(u_h) \ ]_h^{-1} + \varepsilon\tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F})\}u$ ，$R(TU) \equiv \{v \in S_h \mid v = \tilde{T}u \ , \ u \in U\}$ とする．ただし，$\tilde{I} = P_h I$，$\tilde{F} = P_h F$．更に，次を定義する．

$$RE(TU) \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} \phi \in H_0^1(\Omega) & | & \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \le \alpha \\ & and & \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le Ch\alpha \end{array} \right\} \tag{3}$$

$$where \quad \alpha \equiv \sup_{u \in U} \|Tu - \tilde{T}u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{4}$$

但し C は S_h の近似性と G の評価から合成される定数である．このとき，空でない有界凸閉集合 $U \subset H_0^1(\Omega)$ が，ある ε に対して $R(TU) \ \oplus \ RE(TU) \ \overset{\circ}{\subset} \ U$ となれば，$u = Fu$ の解が U の中に存在することが示せる．

続いて，検証条件をみたす集合 U を計算機内で生成するためのアルゴリズムを与える．S_h の基底を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ ，Θ_h を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ と区間係数との一次結合全体 とする．$\alpha \in \mathbf{R}^+$ に対して，

$$[\alpha] \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} \phi \in H_0^1(\Omega) & | & \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \le \alpha \\ & and & \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le Ch\alpha \end{array} \right\} \tag{5}$$

とおく．δ を正の定数，$\alpha_0 \in \mathbf{R}^+$ ，$\triangle u_h^0 \in \Theta_h$ を適当に決め次の反復を定義する．
$n \ge 1$ に対し，$\triangle u_h^{n-1}$ ，$[\alpha_{n-1}]$ は既知とする．この時，各係数区間，及び誤差を δ だけ拡大させたものを $\triangle \tilde{u}_h^{n-1}$ ，$\tilde{\alpha}_{n-1}$ とおく．$U^{n-1} = u_h + \triangle \tilde{u}_h^{n-1} + [\tilde{\alpha}_{n-1}]$ に対し，$\triangle u_h^n$，α_n を次で与える．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \triangle u_h^n & \equiv & \tilde{T}U^{n-1} - u_h \\ \alpha_n & \equiv & Ch\lambda \ \sup_{u \in U^{n-1}} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \end{array} \right. \tag{6}$$

この時，ある $n \ge 1$ に対して $\triangle u_h^n \overset{\circ}{\subset} \triangle u_h^{n-1}$ かつ $\alpha_n < \alpha_{n-1}$ となれば，$U^n = u_h + \triangle u_h^n + [\alpha_n]$ の中に (1) の弱解が存在することが示せる．但し，$\overset{\circ}{\subset}$ は各係数区間の包含関係として考える．