常微分方程式の解の検証付き数値計算法

田中義朗

Department of Mathematics, Kyushu University 33,

Fukuoka 812, Japan

平成 4 年 1 月 28 日

序文

現在, 常微分方程式の解の存在を数値的に検証する方法について, 様々な研究がなされている。中でも, 初期値問題や境界値問題については, 多くの研究者たちがその解の存在を数値的に検証する方法を提唱している。本論文では, 最近提唱された代表的ないくつかの方法について解説し, それらを方法論的見地から考察する。[15] によれば, 数値的検証法は, 方法論的にみて次の三通りに分類することができる。

(1) 区間解析に基づく検証法
(2) 解析的方法に基づく検証法
(3) の両者の中間的な混合法

(1),(2),(3) をそれぞれ説明すると,(1) は数値計算に用いられる実数の区間を, 関数値がその中に含まれる全ての関数を表す関数空間の部分集合とみなすことができる, という事実を問題の方程式の解の存在の検証に利用する方法である。この方法は, 主にドイツの区間解析の研究者たちの間でよく用いられている。Lohner の方法や Kaucher-Miranker[6] がその代表的な方法である。

これに対して,(2) は問題の方程式に関して現われる関数や作用素のノルムを数値的に評価して, それらの関係式がある特定の条件 (例えば, $Kantorovich$ の定理の仮定等) を満足することを確かめるという方法であり, 最も古くから行われている。McCarthy の方法, Kedem の方法, Urabe の方法がその代表的な方法である。

(3) は基本的に (2) の方法に近いが, 区間による関数の集合の表現を, 検証手順の一部において, 本質的な役割を果たす道具として利用するという方法である。Nakao の方法がその代表的な方法である。

以下, 本論文の構成を述べる。

第 1 章では, 第 2 章の準備として, 第 2 章で必要な主な定義や定理について説明する。

第 2 章では, 最近提唱された各方法を, 上記の分類に従って, 方法別に各節に分けてそれぞれ解説する。

2.1 節では, 初期値問題と境界値問題の解の存在と一意性について考察した後, 区間法の代表的な例として, Lohner [9] の方法について説明する。

次に,2.2 節から 2.6 節では, 解析的方法の幾つかの例について解説する。

2.2 節では, $Sturm - Liouville$ 型線形境界条件及び周期的境界条件をもつ境界値問題の解の存在について, 残差 $Newton$ 法を用いた近似解の計算を利用した Plum [20] の方法について説明する。

2.3 節では, ベクトル値 2 階境界値問題の解の存在について, 数値的アルゴリズム ($EB\ algorithm$) を用いた Schröder [22] の方法について説明する。

2.4 節では, 2 点境界値問題の解の存在について, $Banach$ 空間における $Kantorovich$ の

定理を利用した McCarthy [10] の方法について説明する。

2.5 節では, 2 点境界値問題の解の存在について,2.5 節と同じく, $Banach$ 空間における $Kantorovich$ の定理を利用した Kedem [7] の方法について説明する。

2.6 節では, 非線形常微分方程式の周期解の存在について, 広義 $Newton$ 法を利用した Urabe [25] の方法について説明する。

2.7 節では, 混合法の例として, 2 点境界値問題の解の存在について, $Banach$ 空間における $Sadovskii$ の不動点定理を利用した Nakao [17] の方法について説明する。

第 3 章では, 第 2 章の各方法について考察する。

最後に, 本論文を完成するにあたって, 御指導, 御協力頂いた中尾充宏助教授, 並びに山本野人助手に深く感謝致します。

目 次

1 準備 **2**

2 各方法とその展開 **6**

2.1 Lohner の方法 6

2.1.1 一般の初期値問題の解の存在と一意性 7

2.1.2 一般の境界値問題の解の存在と一意性 9

2.1.3 一般の初期値問題の解の包み込み 12

2.1.4 大域的誤差の評価方法 15

2.1.5 一般の境界値問題の解の包み込み 18

2.1.6 数値的検証例 18

2.2 Plum の方法 18

2.2.1 解の存在とその包含に関する定理 19

2.2.2 近似解 ω と定数 δ の計算方法 21

2.2.3 定数 K と K' の計算方法 22

2.2.4 数値的検証例 28

2.3 Schröder の方法 28

2.3.1 breakpoint を用いた問題の変換 29

2.3.2 解の存在とその包含に関する定理 32

2.3.3 EB algorithm 38

2.3.4 数値的検証例 40

2.4 McCarthy の方法 40

2.4.1 境界値問題の定式化 41

2.4.2 Kantorovich の定理の定数の計算方法 43

2.4.3 数値的検証例 46

2.5 Kedem の方法 46

2.5.1 境界値問題の定式化 47

2.5.2 Kantorovich の定理の定数の計算方法 49

2.6 Urabe の方法 52

2.6.1 問題の定式化とその展開 52

2.6.2 数値的検証例 57

2.7 Nakao の方法 57

2.7.1 境界値問題の定式化 57

2.7.2 rounding と検証条件 59

2.7.3 計算機上の検証条件 61

2.7.4 一意性について 64
2.7.5 数値的検証例 66

3 考察 **67**

Chapter 1

準備

この第 1 章では, 次の第 2 章で取り扱う各方法を解説するのにあたって, その第 2 章で問題を定式化したり, 補題や定理等を証明する際, 適用する主な定義及び定理について説明することにする。また, それらの定理の証明は, 参考文献を挙げるだけにとどめて, ここでは行わないことにする。

Definition 1 集合 Mに対して, $\chi(M)$ を Mのコンパクトでない測度とする。次に, Xを $Banach$ 空間とし, X上の作用素 $T : X \longrightarrow X$に対して, その定義域を $D(T)$ と表すことにする。

このとき, 作用素 Tが次の 2 つの条件を満足するとき, Tを $condensing\ operator$ と呼ぶ。
(1) Tは有界連続である。
(2) $\chi(M) > 0$ である $D(T)$ 内の有界集合 $M \subset D(T)$ に対して,

$$\chi(T(M)) < \chi(M)$$

が成り立つ。

Definition 2 集合 Mと Nに対して, Mが Nに 強く含まれる とは, Mの閉包が Nの内点に含まれるときをいう。即ち,

$$\overline{M} \subset \overset{\circ}{N}$$

が成り立つときをいう。このとき, Mと Nの関係を, $M \overset{\circ}{\subset} N$とかく。

Proposition 1 ($\chi(M)$ についての性質)
$definition\ 1.1$ で定義した $\chi(M)$ に対して, 次の $(1) \sim (9)$ が成り立つ。ただし, 記号 $\overline{M}$は集合 Mの閉包を, $co(M)$ は Mの凸包をそれぞれ表すものとする。

(1) $\chi(\phi) = 0$ (ϕは空集合を表す記号)
(2) $\chi(M) = 0 \iff M$は相対コンパクト集合である。
(3) $0 \leq \chi(M) \leq diam\,(M)$ (ただし, $diam\,(M)$ は集合 Mの直径を表すものとする。)
(4) 集合 Mと Nに対して, 次が成り立つ。

$$M \subseteq N \Longrightarrow \chi(M) \subseteq \chi(N)$$

(5) $\chi(M + N) \leq \chi(M) + \chi(N)$
(6) $\chi(\beta M) = |\beta|\chi(M)$ $for\ \forall\ \beta \in \mathbf{K}$ $(\mathbf{K} = \mathbf{R}\ or\ \mathbf{C})$

(7) $\chi(M) = \chi(\overline{M})$
(8) $\chi(\bigcup_{i=1}^{n} M_i) = \max\{\chi(M_1), ..., \chi(M_n)\}$
(9) $\chi(\overline{M}) = \chi(co(M)) = \chi(\overline{co}(M))$
[証明] [29] を参照。□

Proposition 2 ($condensing\ operator$ の性質)
$(X, \|\cdot\|)$ を $Banach$ 空間とし, 集合 $D \subset X$をその領域とする。更に, 次の $(1) \sim (3)$ が成り立つと仮定する。

(1) 作用素 Kと Cは, Dから Xへの写像である。即ち,

$$K \ : \ D \subset X \longrightarrow X$$
$$C \ : \ D \subset X \longrightarrow X$$

(2) Kは, $k - constructive$ である。即ち,

$$\|Kx - Ky\| \leq k\|x - y\| \quad for\ \forall\ x, y \in D,\ k \in [0, 1)$$

(3) Cは, コンパクト作用素である。
このとき, 作用素 $K + C$は $condensing\ operator$ である。
[証明] $Proposition\ 1.1$ を用いて証明できる。詳細は,[29] を参照。□

Proposition 3 ($Gronwall$の不等式)
関数 $\varphi,\ \psi,\ \chi$を区間 $I \equiv [a, b]$ 上の連続関数とする。区間 I上で, 任意の $t \in I$に対して, $\chi(t) > 0$ であり, 不等式

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)ds$$

が成り立つと仮定する。
　このとき, 区間 I上で次の不等式が成り立つ。

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)\{\exp \int_s^t \chi(u)du\}ds$$

[証明] [2] を参照。□

Theorem 1 ($Banach$ の不動点定理)
$(X, \|\cdot\|)$ を $\|\cdot\|$ をノルムとする $Banach$ 空間, $U \subset X$を Xの閉集合, 作用素 Tを Uから Uへの写像とし, $T(U) \subseteq U$が成り立つと仮定する。更に, Tは U上 $Lipschitz$連続であると仮定する。即ち,

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\| \quad for\ \forall x, y \in U \quad (\text{ただし}, 0 \leq k \leq 1)$$

このとき, Tは U内に唯一つの不動点をもつ。
[証明] [29] を参照。□

Theorem 2 ($Schauder$の不動点定理)
Xを $Banach$ 空間, $K \subset X$を Xの凸閉集合, 作用素 Tを Kから Kへのコンパクト連続な写像とする。このとき, Tは X内に不動点をもつ。
[証明] [29] を参照。□

Theorem 3 ($Sadovskii$ の不動点定理)
Xを $Banach$ 空間, $M \subset X$を Xの空でない有界凸閉集合, 作用素 Tを Mから Mへの $condensing\ operator$ とする。このとき, Tは X内に不動点をもつ。
[証明] [29] を参照。□

Theorem 4 ($Kantorovich$ の定理)
Xと Yを $Banach$ 空間, $D \subset X$を Xの凸開集合, 非線形写像 Fを $D \subset X$から Yへの C^2級写像, Fの $Fréchet$ 微分をそれぞれ F', F''で表し, $x_0 \in D$と仮定する。更に, 次の条件 $(a) \sim (f)$ が成り立つと仮定する。
(a) $[F'(x_0)]^{-1}$が存在する。
(b) $\|x_1 - x_0\| \leq \eta$ が成り立つような正定数ηが存在する。ただし,

$$x_1 \equiv x_0 - [F'(x_0)]^{-1}F(x_0)$$

とする。
(c) $\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq B$が成り立つような正定数 Bが存在する。
(d) 正定数 rに対して, 球 $\|x - x_0\| \leq r$ 内の任意の点 x に対し, $\|F''(x)\| \leq \kappa$
が成り立つような正定数 κが存在する。
(e) 正定数 $h \equiv \eta \cdot B \cdot \kappa$に対して, $h < \frac{1}{2}$ が成り立つ。
(f) 正定数 $r_0 \equiv \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}$に対して, $r_0 \leq r$ が成り立つ。
このとき, 方程式 $F(x) = 0$ は球 $\|x - x_0\| \leq r_0$ 内に一意な解 x^*をもつ。更に, $Newton$ 法

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_0)]^{-1}F(x_k)$$

は, $k \to \infty$ のとき, 点 x^*に収束する。
[証明] [5] を参照。□

Theorem 5 Pを多項式とし, その次数 $deg\ P$ が次の関係式を満たすものとする。

$$deg\ P \leq n < m$$

この多項式 Pに対して,

$$|P(x_\mu)| \leq 1 \quad \left(x_\mu \equiv \cos\frac{2\mu - 1}{2m}\pi \ \left(\mu = 1, ..., m \right) \right)$$

が成り立つとき, 次の不等式が成り立つ。

$$|P(x)| \leq \frac{1}{\cos\frac{\pi n}{2m}} \quad \left(x \in [-1, 1] \right)$$

[証明] [3] を参照。□

最後に, 区間解析に関する基本的な性質を述べて, この章の結びとする。証明については,[11] を参照。

$\underline{a} \leq \overline{a}$である実数 $\underline{a}$と $\overline{a}$に対して, 区間 $[\underline{a}, \overline{a}]$ は次で定義される。

$$[a] \equiv [\underline{a}, \overline{a}] \equiv \{ \ x \in \mathbf{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \overline{a} \ \}$$

特に, $\underline{a} = \overline{a}$のとき, $[a] = a \equiv \underline{a} = \overline{a}$である。
次に, 二つの区間 $[a]$ と $[b]$ の演算は, 次で定義される。

$$[a] * [b] \equiv \{\ a * b \mid a \in [a],\ b \in [b]\ \} \qquad \begin{cases} * \in \{+, -, \cdot, /\} \\ 0 \notin [b] \qquad for\ * = / \end{cases}$$

具体的には, 区間の加法 $+$, 減法 $-$, 乗法 $\cdot$, 除法 $/$は, それぞれ次で定義される。

$$\begin{cases} [a] + [b] &=& [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}] \\ [a] - [b] &=& [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}] \\ [a] \cdot [b] &=& [\min(\underline{ab},\ \underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b}), \max(\underline{ab},\ \underline{a}\overline{b},\ \overline{a}\overline{b},\ \overline{a}\underline{b})] \\ [a]/[b] &=& [\min(\underline{a}/\underline{b},\ \underline{a}/\overline{b},\ \overline{a}/\overline{b},\ \overline{a}/\underline{b}), \max(\underline{a}/\underline{b},\ \underline{a}/\overline{b},\ \overline{a}/\overline{b},\ \overline{a}/\underline{b})] \end{cases}$$

また, 三つの区間 $[a],\ [b],\ [c]$ に対して, 次が成り立つ。

(1) $[a] + [b] = [b] + [a]$

(2) $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c]),\ ([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c])$

(3) $[a] \cdot [b] = 0 \iff [a] = [0, 0]\ or\ [b] = [0, 0]$

(4) $[a] \cdot ([b] + [c]) \subset [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c]$

$[a] \cdot ([b] + [c]) = [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c] \qquad if\ bc \geq 0 \qquad for\ \forall\ b \in [b],\ \forall\ c \in [c]$

$\alpha([b] + [c]) = \alpha[b] + \alpha[c] \qquad for\ \forall\ \alpha \in \mathbf{R}$

最後に, 区間 $[a]$ の幅 $d([a])$ と二つの区間 $[a],\ [b]$ 間の距離 $q([a], [b])$ は, それぞれ次で定義される。

$$\begin{aligned} d([a]) &\equiv \overline{a} - \underline{a} \\ q([a], [b]) &\equiv \max\{\ |\underline{a} - \underline{b}|,\ |\overline{a} - \overline{b}|\ \} \end{aligned}$$

Chapter 2

各方法とその展開

2.1 Lohner の方法

文献 [8],[9] に従い, Lohner の方法を以下で解説する。

Lohner の方法で対象としているのは, 初期値問題と境界値問題である。初めに, 初期値問題及び境界値問題について, その定義を一般的に与えておく。

初期値問題

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで, fは $\mathbf{R}^{n+1}$の開集合である $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$から $\mathbf{R}^n$への関数であり, u_0は点 $t_0 \in \mathbf{R}^n$における関数 u の初期値である。また, このとき, $(t_0, u_0) \in D$である。

境界値問題

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \\ r(u(a),u(b)) &= 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

ここで, fは $[a,b] \times D$から $\mathbf{R}^n$への関数であり, Dは $\mathbf{R}^n$の開集合である。また, rは $D \times D$から $\mathbf{R}^n$への境界条件を表す関数である。

境界値問題には次のような境界条件の種類がある。

(1) $r(u(a),u(b)) = u(a) - u_0$ (初期条件)

(2) $r(u(a),u(b)) = Au(a) + Bu(b) + c \quad (A, B \in M_n(\mathbf{R}))$ (線形境界条件)

(3) $r(u(a),u(b)) = u(b) - u(a)$ (周期的境界条件)

(4) $r(u(a),u(b)) = \begin{pmatrix} u_1(a) - c_1 \\ \vdots \\ u_k(a) - c_k \\ u_1(b) - c_{k+1} \\ \vdots \\ u_{n-k} - c_n \end{pmatrix} \quad (c_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i, k \leq n)$

(分離的境界条件)

ここに現れている境界条件は全て (2) の特別な $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ を適当にとることで決まる。例えば, (3) の場合, $A = I, B = -I, c = 0 \quad (\ I \in M_n(\mathbf{R})$ は単位行列 $)$) ととった場合となる。また, (1) によって, 初期値問題は境界値問題に含まれることもわかる。

以下では,(2.1) と (2.2) の各々の場合について, 解の存在と一意性について考察し, 引き続い

て, 解の包み込みの方法について考える。

2.1.1 一般の初期値問題の解の存在と一意性

次のような初期値問題について考える。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & f(u) \\ u(t_0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

ここで, fは $\mathbf{R}^n$の開集合 $D \subset \mathbf{R}^n$から $\mathbf{R}^n$への p 回連続微分可能な関数である (ただし, p は 2 以上の自然数とする。) 。即ち, $f \in C^p(D, \mathbf{R}^n)$ である。また, $u_0 \in D$は, 点 t_0における関数 u の初期値である。

関数 f の連続性から,(2.3) は次のように同値変形することができる。

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s))ds$$

初期値問題 (2.3) の解が作用素 Tの不動点となるように, 次のように Tを定義することにする。

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s))ds$$

このとき, Tの不動点が初期値問題 (2.3) の解となる。問題は, $Banach$ の不動点定理を適用するのに必要な部分集合 Uを構成することである。この Uを構成するために, 次のような区間 Jとノルム $\|\cdot\|$ を導入する。

$J \equiv [t_0, t_0 + h] \subset \mathbf{R} \quad (h > 0)$
$t \in J$
ノルム $\|u(t)\|_\infty = \max\limits_{i \in \mathbf{N}} \mid u_i(t) \mid$ に対して,
$\|u(t)\| \equiv \max\limits_{t \in J}\{e^{-\alpha(t-t_0)}\}\|u(t)\|_\infty \quad (\alpha > 0)$

関数空間 $C(J, \mathbf{R}^n)$ は, ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して $Banach$ 空間をなす。不等式 $e^{-\alpha h}\|u(t)\|_\infty \leq \|u(t)\| \leq \|u(t)\|_\infty$ によって, $\|\cdot\|_\infty$ と $\|\cdot\|$ は同値であるので, $C(J, \mathbf{R}^n)$ はノルム $\|\cdot\|$ に関しても $Banach$ 空間をなすことがわかる。そこで, 次のように U を構成することにする。
区間 $[u^0] = [\underline{u}^0, \overline{u}^0] \subseteq D$ に対して,

$$U \equiv \{\ u \in C(J, \mathbf{R}^n)\ \mid\ \underline{u}^0 \leq u(t) \leq \overline{u}^0 \quad for\ \forall\ t \in J\ \}$$

このように Uを定義すると, 明らかに任意の $u \in U$ に対し, $u(t) \in [u^0]$ である。また, Uは B の閉部分集合であり, fの滑らかさから, f は区間 $[u^0]$ 上で $Lipschitz$連続となる。即ち,

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \quad for\ \forall\ x, y \in [u^0]$$

そこで, $\alpha = \frac{L}{2}$ ととれば, Tが U上で $Lipschitz$ 連続であることが次の $Lemma\ 2.1$ で示される。

Lemma 1 集合 $U = \{\ u \in C(J, \mathbf{R}^n)\ \mid \underline{u}^0 \leq u(t) \leq \overline{u}^0,\ t \in J\ \}$, fの $Lipschitz$定数 L に対して, $\alpha = \frac{L}{2}$とすると, T は U上 $Lipschitz$連続である。

[証明] $n=1$ に限り証明する。 $n \geq 2$ の場合も同様である。
任意の $x, y \in U$ に対して,

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= \max_{t \in J} e^{-\frac{L}{2}(t-t_0)} \| \int_{t_0}^{t} (f(x(s)) - f(y(s)))ds \|_\infty \\
&\leq \max_{t \in J} e^{-\frac{L}{2}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(x(s) - f(y(s)\|_\infty ds \\
&\leq \max_{t \in J} e^{-\frac{L}{2}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} L\|x - y\|_\infty ds \\
&= \max_{t \in J} e^{-\frac{\beta}{2}} \beta \|x - y\|_\infty \quad (\text{ただし}, \ \beta \equiv L(t-t_0), \beta \in [0, Lh] \ ) \\
&= \frac{1}{2}\|x - y\| \quad (0 < \frac{2}{e} < 1)
\end{aligned}$$

従って, $\|Tx - Ty\| \leq L'\|x - y\| \quad for \ \forall \ x, y \in U \quad (\text{ただし}, \ L' \equiv \frac{2}{e} \ )$ □

作用素 T は U から U 自身への写像であることは次の $Theorem\ 2.1$ の証明からわかるので, $Lemma\ 2.1$ より T は $Banach$ の不動点定理の仮定を満たすことがわかる。これによって, 初期値問題 (2.3) の解の存在と一意性に関して, 次の $Theorem\ 2.1$ が成り立つ。

Theorem 6 (初期値問題の解の存在と一意性)
初期値問題 (2.3) に対して, 区間 $[u^0]$,$[u^1]$ が, それぞれ

$$\begin{aligned}
[u^0] &\subseteq D \subset \mathbf{R}^n \\
[u^1] &\equiv u_0 + [0, h] \cdot f([u^0]) \subseteq [u^0] \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

を満たすとき, 初期値問題 (2.3) は区間 J 上で一意の解 $u^* = u^*(t)$ をもち, $u^* \in [u^0]$ である。
更に, $u^* \in [u^1]$ も成り立つ。
[証明] 任意の $u \in U$ をとると, T の定義から, 任意の $t \in J$ に対して,

$$\begin{aligned}
(Tu)(t) &= u^0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s))ds \\
&\in u^0 + \int_{t0}^{t} f([u^0])ds \\
&= u_0 + f([u^0]) \cdot (t - t_0) \\
&\subseteq u_0 + f([u^0]) \cdot [0, h] \\
&= [u^1] \\
&\subseteq [u^0]
\end{aligned}$$

よって, $(Tu)(t) \in [u^0] \ \ for \ \forall \ t \in J \qquad (1)$
$u \in U$ は任意であったので, T は U から U 自身への写像となる。
ここで $Lemma\ 2.1$ の証明より, T は縮小写像であることがわかる。
従って, $Banach$ の不動点定理より, $Tu^* = u^*$ となる U 内の点 $u^* \in U$ が唯一つ存在する。
よって (1) より, $(Tu^*)(t) \in [u^1]$ である。
また条件 (2.4) から, $u^* \in [u^1] \subseteq [u^0]$ である。 □

Remark 1 $f \in C(D, \mathbf{R}^n)$ だから, 初期値問題 (2.3) の解は t に関して $(p+1)$ 回連続微分可能で, 初期値 u_0 に関して p 回連続微分可能である。
条件 (2.4) は初期値問題 (2.3) の区間 J 上の解の存在と一意性を保証している。しかしながら, $h > 0$ の値が大きい可能性があるので, 不十分である場合が多い。

2.1.2　一般の境界値問題の解の存在と一意性

境界値問題 (2.2) の解の存在と一意性について必要な, 解の孤立性について定義することにする。このとき, この定義を成り立たせるために必要な, f が u に関して 2 回連続微分可能で, 関数 $r = r(p,q)$ が 各変数 (p,q) に関して 2 回連続微分可能であることを仮定する。

Definition 3 (解の孤立性)
境界値問題 (2.2) の解 $u = u(t)$ が孤立している (孤立解をもつ) とは, 方程式

$$\begin{cases} v'(t) &= A(t)v(t) \quad t \in [a,b] \\ B_a v(a) + B_b v(b) &= 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

が自明な解 $v(t) = 0$ しかもたないときをいう。ただし, 各 $A(t)$,B_a,B_bは次で定義するものとする。

$$\begin{cases} A(t) &\equiv \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t)) \\ B_a &\equiv \frac{\partial r}{\partial p}(u(a), u(b)) \\ B_b &\equiv \frac{\partial r}{\partial q}(u(a), u(b)) \end{cases}$$

ここで, 解の孤立性に関して, 次の $Lemma\ 2.2$ が成り立つ。

Lemma 2 行列方程式

$$\begin{cases} U(t)' &= A(t)U(t) \quad (a \le t \le b) \\ U(a) &= I \qquad\quad (I \in M_n(\mathbf{R}) \text{ は単位行列}) \end{cases}$$

の基本解行列 $U(t) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, 行列 $B \equiv B_a + B_b U(b)$ が正則行列ならば, 方程式 (2.5) は自明な解 $v(t) = 0$ しかもたない。即ち, 境界値問題 (2.2) の解は孤立している。
[証明] 方程式 (2.5) の基本解行列が $U(t)$ であるから, $v(t) = U(t)C$　(Cは $\mathbf{R}^n$の任意のベクトル) とかける。
よって, $U(a) = I$となる $v(t)$ をとると, $v(a) = C$である。
従って, $v(t) = U(t)v(a)$
$t = b$ のとき $v(b) = U(b)v(a)$ であるから,

$$\begin{aligned} B_a v(a) + B_b v(b) &= B_a v(a) + B_b U(b) v(a) \\ &= Bv(a) \end{aligned}$$

(2.5) より, $Bv(a) = 0$
仮定より, $detB \neq 0$ だから, $v(a) = 0$
よって, $C = v(a) = 0$
ゆえに, $v(t) = U(t)C = 0$ □

次に, 境界値問題 (2.2) の解を求めるのに,(2.2) を同値な初期値問題に変換して, *shooting method* を適用する。*shooting method* には, *simple shooting method* と *multiple shooting method* があり, 各々の場合にわけて考えることにする。
(*simple shooting method* の場合)
次のような初期値問題を考える。

$$\begin{cases} u' &= f(t,u) \quad t \in [a,b] \\ u(a) &= s \qquad s \in D \end{cases} \tag{2.6}$$

初期値問題の解の存在と一意性から,(2.6) には解が存在して, かつその解 $u(t;s)$ は一意である。初期値問題 (2.6) の解が境界値問題 (2.2) の解であるためには,(3.2) の境界条件を満足すればよい。即ち, $s \in D$は次の条件 (2.7) を満たせばよい。

$$F(s) \equiv r(s, u(b;s)) = r(u(a), u(b)) = 0 \tag{2.7}$$

従って,

$$\text{境界値問題 } (2.2) \text{ の解が } u(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{初期値問題 } (2.6) \text{ の解が } u(t;s) \\ u(t;s) \text{ は } (2.7) \text{ を満たす} \end{cases}$$

$(multiple\ shooting\ method$ の場合$)$

この場合, 区間 $[a,b]$ が m 個の部分区間に細分されている。即ち,

$$a \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m \equiv b$$

各々の区間 $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, ..., m-1)$ 上で, 次のような m 個の初期値問題を考える。

$$\begin{cases} u_i' &= f(t, u_i) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ u_i &= s_i & s_i \in D \end{cases} \tag{2.8}$$

初期値問題の解の存在と一意性から,(2.8) には解が存在して, かつその各解 $u_i(t;s_i)$ は一意である。初期値問題 (2.8) の解が境界値問題 (2.2) の解であるためには, 次の条件 (2.9) を満たせばよい。

$$F(s) = \begin{pmatrix} u_0(t_1;s_0) - s_1 \\ u_1(t_2;s_1) - s_2 \\ u_2(t_3;s_2) - s_3 \\ \vdots \\ u_{m-1}(t_m;s_{m-1}) - s_m \\ r(s_0, s_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

ここで, $s = (s_0, s_1, ..., s_m) \in D^{m+1},\ F(s) \in \mathbf{R}^{n(m+1)}$である。
従って,

$$\text{境界値問題 } (2.2) \text{ の解が } u(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} m \text{ 個の初期値問題 } (2.8) \text{ の各解が } u_i(t;s_i) \\ (i = 0, 1, 2, ..., m-1) \\ \text{その各解 } u_i(t;s_i) \text{ が } (2.9) \text{ を満たす} \end{cases}$$

ここで, 以上のことに関連して, 境界値問題 (2.2) について, 次の $Theorem\ 2.2$ が成り立つ。

Theorem 7 次の条件 (A),(B),(C) が成り立つと仮定する。
(A) 境界値問題 (2.2) は孤立解 $u(t) \in C[a,b]$ をもつ。
(B) $S_\rho \equiv \{\ (t,w) \mid t \in [a,b], \|w - u(t)\| \le \rho\ \ (\rho > 0)\ \}$ に対して,
$f(t,u) \in C^2(S_\rho)$ である。
(C) $Q_\rho \equiv \{\ (p,q) \mid \|p - u(a)\| \le \rho, \|q - u(b)\| \le \rho\ \}$ に対して,
$r(p,q) \in C^2(Q_\rho)$ である。
更に, 関数 fは, 変数 wに関し, S_ρ上 $Lipschitz$連続であると仮定する。
このとき, 次の (a),(b),(c) が成り立つ。
(a) $F(s) \in C^2(K)$ である。
(b) $F(s^*) = 0\ for\ s^* = u(a)$ $\quad$ $(simple\ shooting\ method$ の場合$)$

$F(s^*) = 0$ *for* $s^* = (u(t_0), ..., u(t_m))$　　(*multiple shooting method* の場合)

(c) $F(s^*)$ の *Jacobi* 行列 $J(s^*)$ は正則行列である。

[証明] (a) これを証明するのに, 次の *Lemma* 2.3 を用いる。

Lemma 3 *Theorem* 2.2 の条件 (A),(B) が成り立ち, fが wに関して S_ρ上 *Lipschitz*連続であると仮定する。更に, 定数δ, Kを次で定義する。

$$\begin{cases} \delta &= \rho e^{-L(b-a)} \\ K &= \{s \mid \|u(a) - s\| < \delta\} \subset \mathbf{R}^n \end{cases}$$

このとき, 任意の $s \in K$ に対して, 境界値問題 (2.2) は S_ρ 内に一意の解をもつ。更に, その一意の解 $u(b;s)$ に対して, $u(b;s) \in C^2(K)$ であり, かつ $G(t;s) \equiv \frac{\partial u(t;s)}{\partial s}$ と定めるとき, 次が成り立つ。

$$\begin{cases} G'(t;s) &= \frac{\partial}{\partial u} f(t;u(t;s))G(t;s) & (\ t \in [a,b]\ ) \\ G(a) &\equiv G(a;s) = I & (I \in M_n(\mathbf{R}) \text{ は単位行列}) \end{cases}$$

[証明] [2] を参照。□

Lemma 2.3 より,(2.6) の S_ρ内の解 $u(b;s)$ に対して, $u(b;s) \in C^2(K)$ である。
よって,(2.9) より, $F(s) \in C^2(K)$ □

(b)(*simple shooting method* の場合)

$$F(s^*) = r(s^*, u(b;s^*))$$

この場合 $s^* = u(a)$ だから, $F(s^*) = r(u(a), u(b;s^*)) = 0$

(*multiple shooting method* の場合)

$s^* = (u(t_0), ..., u(t_m))$ に対して, $F(s)$ は (2.9) のようにかけている。
(2.8) より, $u(t_i) = s_i$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$ だから,

$$\begin{cases} u(t_1;s_0) - s_1 &= 0 \\ \vdots & \\ u(t_{m-1};s_{m-1}) - s_m &= 0 \\ r(s_0, s_m) &= 0 \end{cases}$$

よって, $F(s^*) = 0$ □

(c)(*simple shooting method* の場合)

$F(s) = r(s, u(b;s))$ に対して,

$$\begin{aligned} J(s^*) = \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial r(s,u(b;s))}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial r(s,u(b;s))}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s} \\ &= \frac{\partial r(s,u(b;s))}{\partial p}\frac{\partial s}{\partial s} + \frac{\partial r(s,u(b,;s))}{\partial q}\frac{\partial u(b;s)}{\partial s} \\ &= \frac{\partial r(s,u(b;s))}{\partial p} I + \frac{\partial r(s,u(b;s))}{\partial q} G(b;s) \end{aligned}$$

この場合, $s^* = u(a)$ だから,

$$\begin{aligned} J(s^*) = J(u(a)) &= \frac{\partial r(u(a),u(b;u(a)))}{\partial p} + \frac{\partial r(u(a),u(b;u(a)))}{\partial q} G(b;u(a)) \\ &= B_a + B_b U(b) \\ &= B \end{aligned}$$

Lemma 2.2 より, $detB \neq 0$ であり, 従って行列 $J(s^*)$ は正則行列である。

(*multiple shooting method* の場合)

(2.9) より,

$$
\begin{aligned}
J(s^*) &= \frac{\partial F(s^*)}{\partial s^*} = F'(s^*) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{\partial u_0(t_1;s_0)}{\partial s_0} & -I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial u_1(t_2;s_1)}{\partial s_1} & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & -I & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial u_{m-1}(t_m;s_{m-1})}{\partial s_{m-1}} & -I \\
\frac{\partial r(s_0,s_m)}{\partial s_0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial r(s_0,s_m)}{\partial s_m}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$m=1$ のときは, *simple shooting method* の場合で示されている。
一般の m の場合 $(m \geq 2)$

$$
\begin{aligned}
detJ(s^*) &= det(\frac{\partial r(s_0,s_m)}{\partial s_m}\frac{\partial u_{m-1}(t_m;s_{m-1})}{\partial s_{m-1}}\cdots\frac{\partial u_0(t_1;s_0)}{\partial s_0} + (-1)^m(-1)^m\frac{\partial r(s_0,s_1)}{\partial s_0}) \\
&= det(\frac{\partial r(s_0,s_m)}{\partial s_m}\frac{\partial u_{m-1}(t_m;s_{m-1})}{\partial s_{m-1}}\cdots\frac{\partial u_0(t_1;s_0)}{\partial s_0} + \frac{\partial r(s_0,s_1)}{\partial s_0})
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(b;s)}{\partial s} &= \frac{\partial u_{m-1}(t_m;s_{m-1})}{\partial s_{m-1}}\frac{\partial s_{m-1}}{\partial s} \\
&= \frac{\partial u_{m-1}(t_m;s_{m-1})}{\partial s_{m-1}}\frac{\partial u_{m-2}(t_{m-1};s_{m-2})}{\partial s_{m-2}}\frac{\partial s_{m-2}}{\partial s} \\
&= \cdots \\
&= \frac{\partial u_{m-1}(t_m;s_{m-1})}{\partial s_m}\frac{\partial u_{m-2}(t_{m-1};s_{m-2})}{\partial s_{m-2}}\cdots\frac{\partial u_0(t_1;s_0)}{\partial s_0}
\end{aligned}
$$

よって, $detJ(s^*) = detB \neq 0$ □

2.1.3 一般の初期値問題の解の包み込み

この節で, 初期値問題の解の包み込みの方法を確立する。その手順として, 以下のように解の表現のし方を考えることにする。まず, 初期値問題 (2.3) を考え, これを陽的一段階法で解くものとする。このとき, 幅 $h > 0$ を十分小さくとり, 格子点を $t_j \equiv t_0 + j \cdot h \ \ (j = 0, 1, ...)$, 陽的一段階法の関数を$\Phi = \Phi(u)$ とするとき, 点 $t = t_j$での初期値問題 (2.3) の解 $u_j \equiv u(t_j)$ は次のように表現できる。

$$u_{j+1} = u_j + h\Phi(u_j) + z_{j+1} \quad (j \geq 0) \tag{2.10}$$

ここで, z_{j+1}は区間 $[t_j, t_{j+1}]$ で生じる局所誤差を表すものとする。
(2.10) は解 u_jが真の解であるときの u_{j+1}の正確な表示であり, そのときの局所誤差 z_{j+1} $(j \geq 0)$ は一般に未知であるが, $z_0 = u_0$と定めることにする。目的は, 初期値問題 (2.3) の解を包み込む方法を確立することである。そのための準備として, まず解の表示 (2.10) を変形する。

(2.10) より, ベクトル $z_0, z_1, ..., z_{j+1}$を独立変数とみなすと, u_{j+1}はこれらの関数として表現できる。即ち,

$$u_{j+1} = u_{j+1}(z_0, z_1, ..., z_{j+1})$$

ここで, 関数Φが u に関し連続微分可能であると仮定すると, u_{j+1}は $(j+2)$ 個の変数 $z_0, z_1, ..., z_{j+1}$ の連続微分可能な関数となる。
よって, 点 $(s_0, s_1, ..., s_{j+1}) \in \mathbf{R}^{n(j+2)}$を固定すると, $Taylor$の定理より, u_{j+1}は次のように表現

することができる。

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= \tilde{u}_{j+1}(s_0,...,s_{j+1}) + \sum_{k=o}^{j+1} \frac{\partial u_{j+1}(\hat{z})}{\partial z_k}(z_k - s_k) \\ \exists\, \hat{z} &= (s_0,...,s_{j+1}) + \theta((z_o,...,z_{j+1}) - (s_0,...,s_{j+1})) \\ & \quad (\text{ただし}, 0 < \theta < 1) \end{aligned} \tag{2.11}$$

ここで (2.10) より,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{j+1}(s_0,...,s_{j+1}) &= \tilde{u}_j(s_0,...,s_{j+1}) + h\Phi(\tilde{u}_j(s_0,...,s_j)) + s_{j+1} \\ \tilde{u}_{j+1} &= \tilde{u}_j + h\Phi(\tilde{u}_j) + s_{j+1} \end{aligned}$$

また z_0のとり方を, $z_0 = s_0$とすると $z_0 = u_0 = \tilde{u}_0 = s_0$ となる。

まず,(2.11) の導関数を (2.10) から帰納的に計算する。

$1)$ $k \leq j$のとき

連鎖律を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{j+1}(z_0,...,z_{j+1})}{\partial z_k} &= \frac{\partial}{\partial z_k}(u_j(z_0,...,z_j) + h\Phi(u_j(z_0,...,z_j)) + z_{j+1}) \\ &= \frac{\partial u_j(z_0,...,z_j)}{\partial z_k} + h\frac{\partial \Phi(u_j(z_0,...,z_j))}{\partial u_j}\frac{\partial u_j(z_0,...,z_j)}{\partial z_k} \\ &= (I + h\Phi'(u_j))\frac{\partial u_j}{\partial z_k} \quad (\ \Phi'(u_j)\ \text{は}\Phi\text{の}\ Fréchet\ \text{微分}) \end{aligned}$$

$2)$ $k = j+1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{j+1}(z_0,...,z_{j+1})}{\partial z_k} &= \frac{\partial u_{j+1}(z_0,...,z_{j+1})}{\partial z_{j+1}} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_{j+1}}(u_j(z_0,...,z_j) + h\Phi(u_j(z_0,...,z_j)) + z_{j+1}) \\ &= I \quad (\ I \in M_n(\mathbf{R})\ \text{は単位行列}) \end{aligned}$$

$1), 2)$ より,

$$\frac{\partial u_{j+1}}{\partial z_k} = \begin{cases} (I + h\Phi'(u_k))\frac{\partial u_j}{\partial z_k} & (k \leq j) \\ I & (k = j+1) \end{cases} \tag{2.12}$$

ここで, 簡便のため, 次の略記法を使うことにする。

$$\begin{cases} A_k &= I + h\Phi'(u_k) \\ A_{j+1,k} &= \frac{\partial u_{j+1}(\hat{z})}{\partial z_k} \quad (k \leq j+1) \end{cases}$$

この略記法を用いると,(2.12) より,

$$A_{j+1,k} = \begin{cases} A_j A_{j,k} & (k \leq j) \\ I & (k = j+1) \end{cases}$$

(2.12) から帰納的に計算すると,

$$A_{j+1,k} = A_j A_{j,k} = A_j(A_{j-1}A_{j-1,k}) = \cdots = A_j A_{j-1} A_k$$

以上のことから,(2.11) を変形すると,

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= \tilde{u}_{j+1} + \sum_{k=0}^{j+1} \frac{\partial u_{j+1}(\hat{z})}{\partial z_k}(z_k - s_k) \\ &= (\tilde{u}_j + h\Phi(\tilde{u}_j) + s_{j+1}) + \sum_{k=0}^{j} A_{j+1,k}(z_k - s_k) + I(z_{j+1} - s_{j+1}) \\ &= \tilde{u}_j + h\Phi(\tilde{u}_j) + A_j \sum_{k=0}^{j} A_{j,k}(z_k - s_k) + z_{j+1} \end{aligned}$$

よって,

$$u_{j+1} = \tilde{u}_j + h\Phi(\tilde{u}_j) + A_j \sum_{k=0}^{j} A_{j,k}(z_k - s_k) + z_{j+1} \tag{2.13}$$

この表示 (2.13) を用いて, 初期値問題 (2.3) の解 $u(t)$ の包み込みの方法を確立する。手順は, 次の $(a) \sim (e)$ から構成されている。目的は, 区間 $[t_{j-1}, t_j]$ $(j$=1,2,...) 上の解の包み込み $[u_j]$ が既知であるとき, 次の区間 $[t_j, t_{j+1}]$ 上の解 $u(t)$ の包み込み $[u_{j+1}]$ をよりよく達成することである。

(a) 区間 $[t_j, t_{j+1}]$ 上での解 $u(t)$ の粗い包み込み $[u^0_{j+1}]$ の評価方法

ここでは, 区間 $[t_{j-1}, t_j]$ $(j$=1,2,...) 上の解 $u(t)$ の包み込み $[u_j]$ が既知のとき, 次の区間 $[u_j, u_{j+1}]$ 上の解 $u(t)$ の粗い包み込み $[u^0_{j+1}]$ を評価する。

区間上 $[t_j, t_{j+1}]$ の初期値問題と同値な積分方程式を用いると, 次のように $u(t)$ を評価することができる。

$$\begin{aligned} u(t) = u_j + \int_{t_j}^{t} f(u(s))ds \quad &\in \quad [u_j] + \int_{t_j}^{t} f([u^0_{j+1}])ds \\ &\subseteq \quad [u^0_{j+1}] + [0,h] \cdot f([u^0_{j+1}]) \end{aligned}$$

ここで, $[u^1_{j+1}] \equiv [u_j] + [0,h] \cdot f([u^0_{j+1}]) \subseteq [u^0_{j+1}]$ が成立すれば, $Theorem\ 2.1$ より, 区間 $[t_j, t_{j+1}]$ 上の解の存在と一意性が保証され, $u(t) \in [u^0_{j+1}]$ である。

しかしながら, $[u^1_{j+1}] \subseteq [u^0_{j+1}]$ が成立しない場合は, 次の $algorithm$ を実行することによって, $Theorem\ 2.1$ の条件 (2.4) を満足させることができる。

$(algorithm)$

(1) 最初に, $[u_j] \subseteq [u^0_{j+1}]$ が成立するように $[u^0_{j+1}]$ を適当にとる。

(2) (1) の $[u^0_{j+1}]$ に対して, 任意の $\varepsilon > 0$ をとり,

$$[u^0_{j+1}] \leftarrow \{(1+\varepsilon)[u^0_{j+1}] - \varepsilon[u^0_{j+1}]\}$$

とする。

(3) (2) で求めた $[u^0_{j+1}]$ に対して,

$$[u^1_{j+1}] \leftarrow [u_j] + [0,h] \cdot f([u^0_{j+1}])$$

とする。

(4) (3) で求めた $[u^1_{j+1}]$ に対して,

$[u^1_{j+1}] \subseteq [u^0_{j+1}]$ であるならば, $[u^0_{j+1}] \leftarrow [u^1_{j+1}]$ として,(2) に戻る。

$[u^1_{j+1}] \not\subseteq [u^0_{j+1}]$ であるならば, $algorithm$ 終了。

このようにして, 区間 $[u_j, u_{j+1}]$ 上の解 $u(t)$ の粗い包み込み $[u^0_{j+1}]$ を評価することができる。

(b) 区間ベクトル $[z_{j+1}]$ の評価方法

(a) で求めた $[u^0_{j+1}]$ を用いて, $[z_{j+1}]$ を評価する。

用いる一段階法の関数Φによって形は異なるが, $[z_{j+1}]$ は次のように $[u^0_{j+1}]$ の関数として表現できる。即ち,

$$[z_{j+1}] = \Psi([u^0_{j+1}])$$

このようにして, 区間ベクトル $[z_{j+1}]$ を評価することができる。

(c) 区間ベクトル $[A_j]$ と $[u_{j+1}]$ の評価方法

まず, 既知である区間 $[t_{j-1}, t_j]$ 上の解 $u(t)$ の包み込み $[u_j]$ を用いて, 区間ベクトル $[A_j]$ を評価する。これは,(2.12) より $A_j = I + h\Phi'(u_j)$ だから, $[A_j] = I + h\Phi'([u_j])$ と評価できる。

この $[A_j]$ 用いると,(b) によって, 区間ベクトル $[z_{j+1}]$ は評価されるので,(2.13) より, 値 $\tilde{u}_j + h\Phi'(\tilde{u}_j)$ が評価できれば, 次のように $[u_{j+1}]$ を評価することができる。

$$\begin{aligned}[u_{j+1}] &= \tilde{u}_j + h\Phi(\tilde{u}_j) + [A_j]\sum_{k=0}^{j}[A_{j,k}]([z_k] - s_k) + [z_{k+1}] \\ &= \tilde{u}_j + h\Phi(\tilde{u}_j) + [A_j]\sum_{k=0}^{j}[A_{j-1}][A_{j-2}]\cdot[A_k]([z_k] - s_k) + [z_{k+1}]\end{aligned}$$

このようにして, 区間ベクトル $[A_j]$ と $[u_{j+1}]$ を評価することができる。

(d) 区間 $[t_j, t_{j+1}]$ 上での解 $u(t)$ の粗い包み込み $[u^0_{j+1}]$ の評価向上方法

(c) で求めた $[u_{j+1}]$ を改めて $[u^0_{j+1}]$ ととると,(b),(c) を必要に応じて繰り返し反復することができる。こうして求めた $[u^0_{j+1}]$ は,(a) の $[u^0_{j+1}]$ の評価の向上につながる。区間ベクトル $[z_{j+1}]$ は $[u^0_{j+1}]$ を用いて評価されているので,(b) での評価が向上する。従って,(c) の $[u_{j+1}]$ の評価も向上する。

(e) 点 $s_{j+1} \in [z_{j+1}]$ の取り方

(c) の評価で必要な値$\tilde{u}_j + h\Phi'(\tilde{u}_j)$ を評価するために, 点 $s_{j+1} \in [z_{j+1}]$ をうまく選んで, $\tilde{u}_{j+1} = \tilde{u}_j + h\Phi'(\tilde{u}_j) + s_{j+1}$を評価する。通常は, 点 s_{j+1}を $[z_{j+1}]$ の中点にとる。

以上の $(a) \sim (e)$ によって, 区間 $[t_{j-1}, t_j]$ $(j$=1,2,...$)$ 上の解の包み込み $[u_j]$ が既知であるとき, 次の区間 $[t_j, t_{j+1}]$ 上の解 $u(t)$ の包み込み $[u_{j+1}]$ をよりよく達成することができる。例えば, 初期値問題 (2.3) を区間 $[a, b]$ 上で考え,2.1.2 節の *multiple shooting method* を適用した場合, この包み込みの方法を用いると, 次のようになる。

初期値 u_0は既知であるので, これを粗く包み込むことができる。これから, 初期区間 $[t_0, t_1]$ 上の解 $u(t)$ の粗い包み込み $[u^0_1]$ が得られる。そして, この節の包み込みの方法を繰り返して適用すると, 解 $u(t)$ を区間 $[a, b]$ 全体上で包み込むことができる。こうして, 初期値問題の解の存在と, その解の包含を検証することができる。

2.1.4 大域的誤差の評価方法

前節では, 区間 $[t_{j-1}, t_j]$ 上の解 $u(t)$ の包み込み $[u_j]$ を用いて, 次の区間 $[t_j, t_{j+1}]$ 上の解 $u(t)$ の包み込み $[u_{j+1}]$ を評価する方法について説明した。この節では, この区間ベクトル $[u_{j+1}]$ を, できる限り良く評価する方法について説明する。目的は, 区間 $[t_j, t_{j+1}]$ 上の大域的誤差, 即ち, 真の解 u_{j+1}と近似解$\tilde{u}_{j+1}$との差 r_{j+1}を良く評価することである。つまり, r_{j+1}をできる限り小さく評価することである。まず, これらの関係を示すと,(2.13) より次のように表現できる。

$$\begin{cases} u_{j+1} &= \tilde{u}_{j+1} + r_{j+1} \\ r_{j+1} &= \displaystyle\sum_{k=0}^{j+1} A_{j+1,k}(z_k - s_k) = A_j r_j + (z_{j+1} - s_{j+1}) \end{cases} \tag{2.14}$$

この (2.14) を評価する方法について, 以下のように考えていく。

(1) 評価方法 1

$$\begin{cases} [r_0] &= [z_0] - s_0 \\ [r_{j+1}] &= [A_j][z_j] + [z_{j+1}] - s_{j+1} \end{cases} \tag{2.15}$$

(2.15) のように, 逐次 $[r_{j+1}]$ を評価する方法は, 計算が簡単であり, 累積誤差が少ないという利点がある。しかしながら, 十分な評価へとつながる場合が少ない。例えば, 調和振動子の方程式 $u''(t)+u(t)=0$ の場合, 回転を表す行列 A_jによって, r_jが各成分で同じ区間幅をもてば, 結果として得られる $[r_{j+1}]$ の各成分の区間幅が, 因数 $|\cos t|+|\sin t|$ のために指数的に増大する可能性がある。従って, この評価方法は改善する余地がある。これを次のように行う。

$$\left\{\begin{array}{l} B_0=I(I\in M_n(\mathbf{R})\text{ は単位行列}),[\hat{r}_0]=[z_0]-s_0\text{に対して},\\ r_0\in B_0[\hat{r}_0]\text{ をとる。}\\ \text{適当な正則行列 } B_{j+1}\in M_n(\mathbf{R})\ (j=0,1,...)\text{ に対して},\\ [\hat{r}_{j+1}]=(B_{j+1}^{-1}[A_j]B_j)+B_{j+1}^{-1}([z_{j+1}]-s_{j+1})\text{ とする。}\\ r_{j+1}\in[\hat{r}_{j+1}]\text{ をとる。}\end{array}\right. \tag{2.16}$$

(2.16) によって, r_{j+1}を正則行列 B_{j+1}と区間ベクトル $[\hat{r}_{j+1}]$ とで評価をする。しかし, $B_{j+1}=I\ (j=0,1,...)$ であるならば,(2.15) の特別な場合となって, 不十分な評価となり得る可能性がある。

(2) 評価方法 2

評価方法 1 の (2.16) において, $B_{j+1}\in[A_j]B_j\ (j=0,1,...)$ ととる。

この場合も, $B_{j+1}=I\ (j=0,1,...)$ であるならば,(2.15) の特別な場合となる。もちろん, B_{j+1}が正則行列でなければ, この評価は成立しない。また, この評価方法では, 行列 B_{j+1}を慎重にとる必要がある。これは, 次の理由からである。

$1)$ 行列 B_{j+1}を正則行列にとり, かつ B_{j+1}の条件数が少なくなるようにとらねばならない。

$2)$ 逆行列 B_{j+1}^{-1}の各成分が大きくならないように, 行列 B_{j+1}をとらねばならない。

$2)$ は評価方法 1 と同じ理由からである。これを, 次の評価方法 3 で克服する。

(3) 評価方法 3

まず, 正則行列 $\tilde{B}_{j+1}\in[A_j]B_j$をとる。 $\tilde{B}_{j+1}$は正則行列だから, 次のように, 直交行列 $\tilde{Q}_{j+1}$と上三角行列 $\tilde{R}_{j+1}$とに一意に分解することができる。

$$\left\{\begin{array}{lcl}\tilde{B}_{j+1} & = & \tilde{Q}_{j+1}\tilde{R}_{j+1}\\ B_{j+1} & = & \tilde{Q}_{j+1}\end{array}\right. \tag{2.17}$$

(2.17) によってとった B_{j+1}は正則行列かつ直交行列であるから, 条件数は 1 であるので, 上記の $1),\ 2)$ を満足するものである。この B_{j+1}に対して,(2.15) の評価を行うとよい。

Remark 2 評価方法 (2.16) の結果が二通り得られた場合, $[r_{j+1}]$ の評価の向上方法について述べる。

今, 評価方法 (3.16) の結果が二通り得られたと仮定する。即ち,

$$\left\{\begin{array}{l} B_0=I(I\in M_n(\mathbf{R})\text{ は単位行列}),[\hat{r}_0]=[z_0]-s_0\text{に対して},\\ r_0\in B_0[\hat{r}_0]\text{ をとる。}\\ \text{適当な正則行列 } B_{j+1}\in M_n(\mathbf{R})\ (j=0,1,...)\text{ に対して},\qquad (a)\\ [\hat{r}_{j+1}]=(B_{j+1}^{-1}[A_j]B_j)+B_{j+1}^{-1}([z_{j+1}]-s_{j+1})\text{ とする。}\\ r_{j+1}\in[\hat{r}_{j+1}]\text{ をとる。}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} C_0 = I(I \in M_n(\mathbf{R}) \text{ は単位行列}), [\hat{\hat{r}}_0] = [z_0] - s_0 \text{に対して}, \\ r_0 \in C_0[\hat{\hat{r}}_0] \text{ をとる。} \\ \text{適当な正則行列 } C_{j+1} \in M_n(\mathbf{R}) \ (j = 0, 1, ...) \text{ に対して}, \qquad (b) \\ [\hat{\hat{r}}_{j+1}] = (C_{j+1}^{-1}[A_j]C_j) + C_{j+1}^{-1}([z_{j+1}] - s_{j+1}) \text{ とする。} \\ r_{j+1} \in [\hat{\hat{r}}_{j+1}] \text{ をとる。} \end{cases}$$

このとき, $[r_{j+1}]$ は次のように二通りに評価できる。

$$r_{j+1} = B_{j+1}\hat{r}_{j+1} = C_{j+1}C_{j+1}^{-1}B_{j+1}\hat{r}_{j+1} \in C_{j+1}((C_{j+1}^{-1}B_{j+1})[\hat{r}_{j+1}]) \qquad (c)$$

$$r_{j+1} = C_{j+1}\hat{\hat{r}}_{j+1} = B_{j+1}B_{j+1}^{-1}C_{j+1}\hat{\hat{r}}_{j+1} \in B_{j+1}((B_{j+1}^{-1}C_{j+1})[\hat{\hat{r}}_{j+1}]) \qquad (d)$$

(a),(d) より, $r_{j+1} \in B_{j+1}([\hat{r}_{j+1}] \cap (B_{j+1}^{-1}C_{j+1})[\hat{\hat{r}}_{j+1}])$ $\qquad (e)$

(b),(c) より, $r_{j+1} \in C_{j+1}([\hat{\hat{r}}_{j+1}] \cap (C_{j+1}^{-1}B_{j+1})[\hat{r}_{j+1}])$ $\qquad (f)$

結果として,(e) と (f) の共通部分をとれば, $[r_{j+1}]$ をより狭い区間に評価することができる。

(4) 評価方法 4

区間ベクトル $[u_0]$ の幅 $d([u_0])$ に対して, $d([u_0]) > d([z_k])$ であるとき, 有効な評価方法がある。これは, 以下のような方法である。

まず,(2.14) を次のように表現しなおす。

$$\begin{cases} u_{j+1} &= \tilde{u}_{j+1} + C_{j+1}(z_0 - s_0) + \tilde{r}_{j+1} \\ \tilde{r}_{j+1} &= \sum_{k=0}^{j+1} A_{j+1,k}(z_k - s_k) + (A_{j+1,0} - C_{j+1})(z_0 - s_0) \\ C_0 &= I \ \ (I \in M_n(\mathbf{R}) \text{ は単位行列}), C_{j+1} \in [A_j]C_j \end{cases} \qquad (2.18)$$

このとき, 区間ベクトル $[u_{j+1}]$ は次のように評価することができる。

$$[u_{j+1}] = \tilde{u}_{j+1} + C_{j+1}([z_0] - s_0]) + [\tilde{r}_{j+1}]$$

ここで, $[\tilde{r}_{j+1}]$ の評価に対しては, 前記の $Remark\ 2.2$ の評価が適用できる。この評価方法では, $d([u_0]) > 0$ のとき, 評価方法 1 とは異なる評価が得られ, 行列 C_{j+1}が正則行列でない場合も適用できるという利点がある。ただし, $[z_0] = s_0$のときは評価方法 1 と同じ評価となる。

計算機上の区間演算では次の区間ベクトルを評価する。ただし, $\hat{\diamond}$,$\hat{\diamond}$,$\hat{\diamond}$は, それぞれ計算機上の浮動小数点演算の加法, 減法, 乗法を表すものとする。

$$[u_{j+1}] = \tilde{u}_j \hat{\diamond} h \hat{\diamond} [\Phi(\tilde{u}_j)] \hat{\diamond} [z_{j+1}]$$

ここで, 任意の浮動小数点数$\tilde{u}_{j+1} \in [\tilde{u}_{j+1}]$ をとって, 次を定義する。

$$[\tilde{z}_{j+1}] \equiv [\tilde{u}_{j+1}] \hat{\diamond} \tilde{u}_{j+1}$$

区間ベクトル $[z_{j+1}] - s_{j+1}$を $[\tilde{z}_{j+1}]$ で代用して, 点 s_{j+1}は次で定義する。

$$s_{j+1} \equiv \tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j - h\Phi(\tilde{u}_j)$$

このように計算を行うと,(2.11),(2.13),(2.14) の$\tilde{u}_{j+1}$と$\Phi(\tilde{u}_j)$ の丸め誤差が小さくなるとき, 区間幅 $d([\tilde{u}_{j+1}])$ が小さくなる。従って, 区間幅 $d([\tilde{z}_{j+1}])$ が小さくなる。

2.1.5　一般の境界値問題の解の包み込み

境界値問題の解の存在と一意性については,2.1.2 節で示した。この節では, 境界値問題 (2.2) の解 s^*の包み込み $[s^*]$ を求める方法を説明する。この $[s^*]$ を求める $algorithm$ は, 次のような区間版 $Newton$ 法である。

$(algorithm)$
(1) 解 s^*を含む区間 $[s^0]$ を適当にとる。
(2) 点 $m^\nu \in [s^\nu]$ を固定して (ただし, νはこの $algorithm$ の反復回数とする),

$$[\hat{s}^{\nu+1}] \leftarrow m^\nu - [G^\nu]F(m^\nu)$$

とする。ただし,

$$[G^\nu] \equiv \{\ [F'(s)]^{-1} \mid s \in [s^\nu]\ \}$$

(3) $[\hat{s}^{\nu+1}] \subseteq [s^\nu]$ ならば, $[s^{\nu+1}] \leftarrow [\hat{s}^{\nu+1}]$ として (2) に戻る。
$[\hat{s}^{\nu+1}] \not\subseteq [s^\nu]$ ならば, $(1+\varepsilon)[\hat{s}^{\nu+1}] - \varepsilon[\hat{s}^{\nu+1}]$　(ただし, $\varepsilon > 0$) として (2) に戻る。もしくは, $algorithm$ 終了。

ここで,2.1.3 節の $algorithm$ によって,(1) の区間ベクトル $[s^0]$ は, 小さく評価することができる。また,(2) では, $[G^\nu]$ を計算せねばならないが, $Theorem\ 2.2$ の (c) の証明中の $J(s^*) = F'(s^*)$ を任意の $s \in [s^\nu]$ に対して包み込めばよい。更に,(3) では, $algorithm$ を以下のようにして向上させることができる。

$$[s^{\nu+1}] \leftarrow [\hat{s}^{\nu+1}] \cap [s^\nu]$$

以上から, 境界値問題 (2.2) の解の包み込みを達成することができる。

2.1.6　数値的検証例

次のような境界値問題を考える ($Van\ der\ Pol$ 方程式)。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'' + \varepsilon(u^2-1)u' + u &=& 0 \\ u'(0) = u'(\frac{T}{2}) &=& 0 \\ u(0) &=& -u(\frac{T}{2}) \end{array} \right. \tag{2.19}$$

$\varepsilon = 0.1$ に対して, Lohner の方法を適用すると, $u(0) \in [2.00010397973, 2.00010397997]$, $\frac{T}{2} \in [3.14355560, 3.14355565]$ であるという検証結果が得られている。

2.2　Plum の方法

文献 [20] に従い, Plum の方法を以下で解説する。

次のような境界値問題を考える。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -u''(x) + F(x, u(x), u'(x)) &=& 0 & x \in [0,1] \\ B_0[u] + B_1[u] &=& 0 & \end{array} \right. \tag{2.20}$$

ここで, $F \in C^p([0,1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ (ただし, p は 1 以上の自然数とする。), B_0, B_1は境界作用素である。

この節で考える (2.20) の境界条件は, 次の二つの場合のみについて考える。
(A) $Sturm-Liouville$ 型線形境界条件

$$\left\{ \begin{array}{rcll} B_0[u] & = & -\alpha_0 u'(0)+\gamma_0 u(0) & (\text{ただし, } \alpha_0^2+\gamma_0^2>0) \\ B_1[u] & = & \alpha_1 u'(1)+\gamma_1 u(1) & (\text{ただし, } \alpha_1^2+\gamma_1^2>0) \end{array} \right. \tag{2.21}$$

(B) 周期的境界条件

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B_0[u] & = & u(1)-u(0) \\ B_1[u] & = & u'(1)-u'(0) \end{array} \right. \tag{2.22}$$

目的は, 境界値問題 (2.20) の次で定義される R 上の解の存在を証明して, その解の誤差限界を得ることである。

$$R \equiv \{\, u \in H^2(0,1) \mid B_0[u]=B_1[u]=0 \,\} \tag{2.23}$$

ただし, $H^2(0,1)$ は区間 $(0,1)$ 上の次数 2 の $Sobolev$空間を表す。この空間は,2 回以下の導関数が全て $L^2(0,1)$ に含まれるような関数の空間である。解の存在を検証するために次のことを行う。
(a) 近似解 $\omega \in R$ を計算する。
(b) L^2 ノルム $\| -\omega''+F(\cdot,\omega,\omega')\|_{L^2(0,1)}$を評価する。(以後 $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$を $\|\cdot\|_2$ と略記することにする。)
(c) $\{u \in R \mid L[u] \in R^*\}$ 上の L^*L の最小固有値の正の下限を計算する。ただし, 次のように記号を定義するものとする。

$L[u] \equiv -u''+bu'+cu$
$b \equiv \partial_3 F(\cdot,\omega,\omega')$
$c \equiv \partial_2 F(\cdot,\omega,\omega')$
$L^*[u]$: $L[u]$ の随伴作用素
$R^* \equiv \{u \in H^2(0,1) \mid B_0^*[u]=B_1^*[u]=0\}$
B_0^*, B_1^* : それぞれ B_0と B_1の随伴境界作用素

まず, 境界値問題 (2.20) の R 上の解の存在とその包含に関する定理を示すことにする。

2.2.1 解の存在とその包含に関する定理

$Theorem$ 2.3 を示すのにあたって, 以下のことを仮定する。

Assumption 1 境界値問題に近似解 ωが存在して, 正定数 δについて次が成り立つ。

$$\exists\, \delta>0 \;\; such \;\; that \;\; \| -\omega''+F(\cdot,\omega,\omega')\|_2 \le \delta \tag{2.24}$$

Assumption 2 定数 Kと K'について, 次が成り立つ。

$$\exists\, K>0 \;\; such \;\; that \;\; \|u\|_\infty \le K\|L[u]\|_2 \tag{2.25}$$

$$\exists\, K'>0 \;\; such \;\; that \;\; \|u'\|_\infty \le K'\|L[u]\|_2 \tag{2.26}$$

ただし, $\|\cdot\|_{L^\infty(0,1)} \equiv \|\cdot\|_\infty$である。

Assumption 3 次を満たす **majorizing function** と呼ばれる関数 G が存在する。

$$\left\{ \begin{array}{l} G:[0,\infty)\times[0,\infty) \to [0,\infty) \;\text{ は, 単調非減少関数である。} \\ \text{任意の } x \in [0,1], y \in \mathbf{R}, p \in \mathbf{R} \text{ に対して, 次が成り立つ。} \\ \mid F(x,\omega(x)+y,\omega'(x)+p)-F(x,\omega(x),\omega'(x)) \mid \le G(\mid y \mid, \mid p \mid) \end{array} \right.$$

特に, 関数 Fの滑らかさから, 関数 G は次のようなオーダーにとることができる。

$$G(\alpha,\beta) = O(\alpha^2+\beta^2) \qquad for\ \alpha,\beta \to 0$$

このとき, これらの仮定のもとに, 次の $Theorem\ 2.3$ が成り立つ。

Theorem 8 (解の存在とその包含に関する定理)
$Assumption\ 2.1,\ Assumption\ 2.2,\ Assumption\ 2.3$ が成り立つと仮定する。更に, $\delta \le \min\{\frac{\alpha}{K}, \frac{\beta}{K'}\} - G(\alpha,\beta)$ が成り立つような定数 $\alpha \ge 0$ と $\beta \ge 0$ が存在すると仮定する。

このとき, 境界値問題 (2.20) の近似解 $\omega \in R$ に対して, $\|U-\omega\|_\infty \le \alpha$, $\|U'-\omega'\|_\infty \le \beta$ が成り立つような (2.20) の真の解 Uが存在する。

[証明] 次のような境界値問題を考える。

$$\begin{cases} L[u] + f(\cdot,u,u') &= -d[\omega] \\ B_0[u] + B_1[u] &= 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

ただし, fと $d[\omega]$ は次で定義するものとする。

$$\begin{aligned} f(x,y,p) &\equiv F(x,\omega(x)+y,\omega'(x)+p) - F(x,\omega(x),\omega'(x)) - c(x)y - b(x)p \\ d[\omega] &\equiv -\omega'' + F(\cdot,\omega,\omega') \end{aligned}$$

ここで,(2.27) が $\|u^*\|_\infty \le \alpha,\ \|(u^*)'\|_\infty \le \beta$となるような解 $u^* \in R$ をもつことを示せば, $U \equiv \omega + u^* \in R$ が (2.20) の求める解となって, 結論がいえる。ゆえに, これを示す。

$Assumption\ 2.2$ と $Banach$ の定理から, 線形写像 L には逆写像 L^{-1}が存在する。即ち,

$$-L^{-1} \in \mathcal{L}(R, L^2(0,1))$$

また, $Sobolev$の埋蔵定理によって, $H^2(0,1)$ は $C^1[0,1]$ にコンパクトに埋め込まれることがわかる。即ち,

$$H^2(0,1) \overset{c}{\subset} C^1[0,1]$$

これらの事実から, 作用素 Tを

$$Tu \equiv -L^{-1}(d[\omega] + f(\cdot,u,u'))$$

と定義すると, Tは $C^1[0,1]$ からそれ自身 $C^1[0,1]$ へのコンパクト連続な写像となる。

ここで, 集合 $D \equiv \{\ u \in C^1[0,1] \mid \|u\|_\infty \le \alpha,\ \|u'\|_\infty \le \beta\ \}$ に対して, $TD \subset D$を示せば十分である。なぜなら, これが示されれば, $Schauder$の不動点定理によって, 作用素 Tは不動点をもつことがわかる。この不動点は (2.27) の解になるので, 求める結論を得るからである。従って, $TD \subset D$を示す。

任意の $u \in D$, $x \in [0,1]$ に対して, $Assumption\ 2.3$ より,

$$\begin{aligned} |\ f(x,u(x),u'(x))\ | &\le G(|\ u(x)\ |, |\ u'(x)\ |) \\ &\le G(\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty) \\ &\le G(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \{\int_0^1 |f(x,u(x),u'(x))|^2 dx\}^{\frac{1}{2}} &\le \{\int_0^1 |G(\alpha,\beta)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}} \\ \|f(\cdot,u,u')\|_2 &\le G(\alpha,\beta) \qquad (1) \end{aligned}$$

$Assumption$ 2.1 と仮定, (1) より,

$$\begin{aligned} \|L[Tu]\|_2 &= \|d[\omega] + f(\cdot, u, u')\|_2 \\ &= \| -\omega'' + F(\cdot, \omega, \omega')\|_2 + G(\alpha, \beta) \\ &\leq \delta + G(\alpha, \beta) \\ &\leq \min\{\tfrac{\alpha}{K}, \tfrac{\beta}{K'}\} \end{aligned}$$

$Assumption$ 2.2 より,

$$\begin{aligned} \|Tu\|_\infty &\leq K\|L[Tu]\|_2 \leq \alpha \\ \|(Tu)'\|_\infty &\leq K'\|L[Tu]\|_2 \leq \beta \end{aligned}$$

よって, $Tu \in D \ for \ \forall \ u \in D$, 即ち, $TD \subset D$ □

この $Theorem$ 2.3 によって, 境界値問題 (2.20) の解の存在とその包含について検証することができる。後に, $Assumption$ 2.1 と $Assumption$ 2.2 の近似解 $\omega \in R$ と定数 δ,K,K'を計算するという問題が残るが, これを次の 2.2.2 節以後でみていく。

2.2.2 近似解 ωと定数 δの計算方法

この節では, $Theorem$ 2.3 の仮定である $Assumption$ 2.1 の近似解 $\omega \in R$ と定数 δの計算方法について説明する。

(1) 近似解 $\omega \in R$ の計算方法

近似解 $\omega \in R$ は, 次の $algorithm$ からなる残差 $Newton$ 法を用いて計算する。

$(algorithm)$

(1) 近似解 $\omega_0 \in R$ を適当な方法で求める。

(2) $\omega_{n-1} \in R$ を固定して (ただし, n はこの $algorithm$ の反復回数を表すものとする), 境界値問題

$$\begin{cases} -u'' + \partial_3 F(\cdot, \omega_{n-1}, \omega'_{n-1}) + \partial_2 F(\cdot, \omega_{n-1}, \omega'_{n-1}) \cdot u &= -d[\omega_{n-1}] \\ B_0[u] = B_1[u] &= 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

の近似解 $u_n \in R$ を求める。ただし, $d[\omega_{n-1}]$ は次で定義する。

$$d[\omega_{n-1}] \equiv -\omega''_{n-1} + F(\cdot, \omega_{n-1}, \omega'_{n-1})$$

(3) (2) で求めた $u_n \in R$ に対して,

$$\omega_n \leftarrow \omega_{n-1} + u_n$$

として,(2) に戻る。

ここで, $algorithm(2)$ において近似解 $u_n \in R$を求めるには, 次のような $Newton$ の選点法を用いる。

ある既知の多項式 $P_0(x)$,$P_1(x)$,...,$P_M(x) \in R$ に対して,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{M} a_k P_k(x)$$

と定める。このとき, 各点 $x_0, ..., x_M \in [0, 1]$ を与えて,(2.28) が満足されるようにして係数 $a_0, ..., a_M$を固定すると, $a_0, ..., a_M$に関する連立方程式ができる。この連立方程式は, 部分ピ

ボット選択を用いた $Gauss$ の消去法で解くことができるので, $u_n(x)$ を求めることができる。

後は, 多項式 $P_0(x)$,$P_1(x)$,...,$P_M(x) \in R$と点 $x_0, ..., x_M \in [0,1]$ のとり方が問題として残る。これらは, 次のようにとる。

$$\begin{cases} x_k & \equiv & \frac{1}{2}[1-\cos(\frac{k+1}{M+2}\pi)]^{-1} & (M=0,...,M) \\ P_k & \equiv & x^2(1-x)^2 T_{k-2}(2x-1) & (k \geq 2) \end{cases}$$

ただし, T_iは i 番目の第 1 種 $Chebyshev$多項式を表すものとする。

以上のようにして, 境界値問題 (2.20) の近似解 $\omega \in R$ を求めることができる。

(2) 定数 δの計算方法

δの計算方法は, 次の二つの場合に分けて考える。

(a) 関数 Fが, 各変数について多項式である場合

このとき, $d[\omega] \equiv -\omega'' + F(\cdot, \omega, \omega')$ はある次数 n の多項式となる。

[3] の $Theorem\ 2$ ($Theorem 1.5$) より, 次の評価が得られる。

$$\|d[\omega]\|_\infty \leq C \max_{j=0,1,...,N} \{\ |d[\omega](\xi_j)|\ \} \tag{2.29}$$

ここで, Cと ξ_jは次で定義する。

$$\begin{cases} C & = & C(n,N) \equiv [\cos(\frac{n\pi}{2N})]^{-1} & (\text{ただし, } N\text{は } n < N\text{である自然数}) \\ \xi_j & \equiv & \frac{1}{2}[1+\cos(\frac{j\pi}{N})] & (j=0,1,...,N) \end{cases}$$

$\|d[\omega]_2\| \leq \|d[\omega]\|_\infty$だから,$(2.29)$ より, 点 $\xi_j\ (j=0,1,...,N)$ を適当にとって定数 δの計算ができる。

$(b)(a)$ 以外の場合

まず, 多項式 ω, ω'の上界 $\overline{\omega}$, $\overline{\omega'}$と下界 $\underline{\omega}$, $\underline{\omega'}$を [3] の $Theorem\ 2$ を用いて計算する。

次に, ある $\varepsilon > 0$ に対して, 次のような自然数 $n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N}$ の存在がわかる。

$$\begin{cases} |F(x,y,p) - P(x,y,p)| \leq \varepsilon \quad for\ x \in [0,1],\ y \in [\underline{\omega}, \overline{\omega}],\ p \in [\underline{\omega'}, \overline{\omega'}] \\ P\text{は各変数 } x,y,p \text{ に関して, 各々 } n_1\text{次}, n_2\text{次}, n_3\text{次の多項式} \end{cases}$$

このとき,(a) より, $\tilde{d}[\omega] \equiv -\omega'' + P(\cdot, \omega, \omega')$ はある既知の n 次多項式であることがわかるので, 次のように評価することができる。

$$\begin{aligned} \|d[\omega]\|_\infty &\leq \|-\omega'' + P(\cdot,\omega,\omega')\|_\infty + |F(\cdot,\omega,\omega')| \\ &\leq \|\tilde{d}[\omega]\|_\infty + \varepsilon \\ &\leq C \max_{j=0,...,N} |\tilde{d}[\omega](\xi_j)| + \varepsilon \\ &\leq C \max_{j=0,...,N} |d[\omega](\xi_j)| + (C+1)\varepsilon \end{aligned}$$

このようにして,(a) と同様に, 点 $\xi_j\ (j=0,...,N)$ を適当にとって, 定数 δの計算をすることができる。

2.2.3 定数 K と K' の計算方法

この節では, $Theorem\ 2.3$ の仮定であった $Assumption\ 2.2$ の定数 Kと K'の計算方法について説明をする。この Kと K'を計算するために, 次を満たす定数 C_0, C_1, K_0, K_1, K_2が存在すると仮定する。

$$\|u\|_\infty \leq C_0\|u\|_2 + C_1\|u'\|_2 \quad for\ u \in H^1(0,1) \tag{2.30}$$

$$\|u\|_2 \leq K_0\|L[u]\|_2 \qquad for\ u \in R \tag{2.31}$$
$$\|u'\|_2 \leq K_1\|L[u]\|_2 \qquad for\ u \in R \tag{2.32}$$
$$\|u''\|_2 \leq K_2\|L[u]\|_2 \qquad for\ u \in R \tag{2.33}$$

これらの関係式が成立すれば,(2.25) は $K \equiv C_0K_0 + C_1K_1$で成り立つ。また,(2.30) において u の代わりに u'を代入すると,(2.26) は $K' \equiv C_0K_1 + C_1K_2$で成り立つ。従って, 上の関係式を満足するような定数 C_0, C_1, K_0, K_1, K_2が計算されればよい。まず,(2.30) の定数 C_0と C_1 について, 次の $Lemma\ 2.4$ が成り立つ。

Lemma 4 (2.30) は, 次の境界条件に対する定数 C_0, C_1に対して成り立つ。
(1) $C_0 = 0, C_1 = \frac{1}{2} \quad if\ u(0) = u(1) = 0$
(2) $C_0 = 0, C_1 = 1 \quad if\ u(0) = 0\ or\ u(1) = 1$
(3) C_0は 1 以上の任意の自然数, $C_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}C_0} \quad if\ u(0) = u(1)$
(4) C_0は 1 以上の任意の自然数, $C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}C_0} \quad otherwise$
[証明] [19] の $Lemma\ 2$ を参照。□

次に,(2.31) の定数 K_0の計算方法について説明する。

(定数 K_0の計算方法)
次の 4 階境界値問題を考える。

$$\begin{cases} L^*L[u] = \lambda u \quad on\ (0,1) \\ B_0[u] = B_1[u] = B_0^*[L[u]] = B_1^*[L[u]] = 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

ただし, 各 L^*, B_0^*, B_1^*は, $L^2(0,1)$ に関する内積$<,>$に関する随伴作用素とする。
このとき,(2.34) の最小固有値 λ_1は, 次の式で与えられる。

$$\lambda_1 \equiv \min_{u \in R} \frac{< L[u], L[u] >}{< u, u >}$$

更に, この式から,

$$\|u\|_2 \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|L[u]\|_2$$

こうして, λ_1は,(2.31) の定数 K_0の候補となり得る。そして, この λ_1の正の下界を計算して, これを K_0とすればよい。このとき, Plum [18] のホモトピー法を用いる。このようにして, 定数 K_0の計算をすることができる。

(定数 K_0と K_1の計算方法)
(2.32),(2.33) の定数 K_1と K_2の計算方法については, それぞれ以下の $Lemma\ 2.5$ と $Lemma\ 2.6$ 及び $Lemma\ 2.7$ で説明する。

Lemma 5 (2.31) が成り立つような定数 K_0が存在すると仮定する。更に,(A) $Sturm - Liouville$ 型線形境界条件の場合, と (B) 周期的境界条件の場合, の二つに分けて次の条件が成り立つと仮定する。

(A) $Sturm - Liouville$ 型線形境界条件の場合

$$\begin{cases} A \geq -\frac{\gamma_0}{\alpha_0} + \frac{1}{2}b(0) \quad if\ \alpha_0 \neq 0 \\ A \geq -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} - \frac{1}{2}b(1) \quad if\ \alpha_1 \neq 0 \end{cases}$$

を満たす実数 $A \in \mathbf{R}$ が存在する。

(B) 周期的境界条件の場合

$$A \geq \frac{1}{4}[b(0) - b(1)]$$

を満たす実数 $A \in \mathbf{R}$ が存在する。更に, $x \in [0,1]$ に対して,

$$\underline{c} \leq c(x) - \frac{1}{2}b'(x) - A\{2 + (1-2x)[2A(1-2x) - b(x)]\}$$

が成り立つような実数 $\underline{c} \in \mathbf{R}$ が存在する。

また, 定数 Eを $E \equiv e^{\frac{1}{4}|A|} > 0$ で定める。
このとき, 次の式で定めた定数 K_1に対して,(2.32) が成り立つ。即ち,

$$\|u'\|_2 \leq K_1 \|L[u]\|_2 \quad for\ K_1 \equiv \begin{cases} E[K_0(1-\underline{c}K_0)]^{\frac{1}{2}} & if\ \underline{c}K_0 \leq \frac{1}{2} \\ \frac{E}{2\sqrt{\underline{c}}} & otherwise \end{cases}$$

[証明] $u = 0$ ならば, 任意の $K_1 > 0$ に対して求める結論を得る。従って, $u \neq 0$ として差し支えない。

次に, $x \in [0,1]$, $u \in R - \{0\}$ に対して, 関数 $w(x)$ を次で定義する。

$$w(x) \equiv e^{[-2Ax(1-x)]} \quad for\ x \in [0,1],\ u \in R - \{0\}$$

この $w(x)$ に対して, 次のように部分積分を行って計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 wuL[u]dx &= -\int_0^1 wuu''dx + \int_0^1 wbuu''dx + \int_0^1 wcu^2dx \\ &= \int_0^1 u\{-(wu')'\}dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (w' + wb)(u^2)'dx + \int_0^1 wcu^2dx \\ &= [-wuu' + \tfrac{1}{2}(w' + wb)u^2]_0^1 + \int_0^1 w(u')^2dx \\ &\quad + \int_0^1 \{wc - \frac{1}{2}(w' + wb)'\}u^2dx \end{aligned}$$

ここで, 計算すると,

$$\begin{aligned} w(0) &= w(1) = 1 \\ w'(x) &= -2A(1-2x)e^{[-2Ax(1-x)]},\ w''(x) = \{4A^2(1-2x)^2\}e^{[-2Ax(1-x)]} \\ w'(0) &= -2A,\ w'(1) = 2A \end{aligned}$$

よって, これらを用いて整理すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 wuL[u]dx &= u(1)[-u'(1) + (A + \tfrac{1}{2}b(1))u(1)] \\ &\quad + u(0)[u'(0) + (A - \tfrac{1}{2}b(0))u(0)] + \int_0^1 w(u')^2dx \\ &\quad + \int_0^1 w[c - \frac{1}{2}b' - A\{2 + (1-2x)[2A(1-2x) - b]\}]dx \end{aligned}$$

ここで, 仮定より,

$$c - \frac{1}{2}b' - A\{2 + (1-2x)[2A(1-2x) - b]\} \geq \underline{c}$$

そこで, 次の不等式を示す。

$$u(1)[-u'(1) + (A + \frac{1}{2}b(1))u(1)] + u(0)[u'(0) + (A - \frac{1}{2}b(0))u(0)] \geq 0 \qquad (2.35)$$

(A) $Sturm - Liouville$ 型線形境界条件の場合

$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ とすると,(2.21) より, $\gamma_0 \neq 0,\ \gamma_1 \neq 0$
ゆえに, 境界値問題 (2.20) の境界条件は, $u(0) = u(1) = 0 \quad for\ \forall\ u \in R$
これは分離境界条件であり, 考えている境界条件に反する。
従って, α_0 と α_1は同時には 0 にならないとしてよい。
1) $\alpha_0 \neq 0,\ \alpha_1 \neq 0$ のとき
(2.21) より,

$$\begin{aligned} u'(0) &= \tfrac{\gamma_0}{\alpha_0} u(0) \qquad (1) \\ u'(1) &= -\tfrac{\gamma_1}{\alpha_1} u(1) \quad (2) \end{aligned}$$

(2) と仮定より,

$$u(1)[-u'(1) + (A + \frac{1}{2}b(1))u(1)] \geq 0 \qquad (3)$$

(1) と仮定より,

$$u(0)[u'(0) + (A - \frac{1}{2}b(0))u(0)] \geq 0 \qquad (4)$$

(3) と (4) より,(2.35) を得る。
2) $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 \neq 0$ のとき
$\alpha_0 = 0$ より, $u(0) = 0$
よって,(3) より,(2.35) を得る。
3) $\alpha_0 \neq 0,\ \alpha_1 = 0$ のとき
$\alpha_1 = 0$ より, $u(1) = 0$
よって,(4) より,(2.35) を得る。
以上から,(2.35) を得る。

(B) 周期的境界条件の場合
(2.22) より, $\quad u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1)$
よって, 仮定より,

$$\begin{aligned} & u(1)[-u'(1) + (A + \tfrac{1}{2}b(1))u(1)] + u(0)[u'(0) + (A - \tfrac{1}{2}b(0))u(0)] \\ \geq\ & u(1)[-u'(1) + \{\tfrac{1}{4}(b(0) - b(1)) + \tfrac{1}{2}b(1)\}u(1)] \\ & + u(0)[u'(0) + \{\tfrac{1}{4}(b(0) - b(1)) - \tfrac{1}{2}b(0)\}u(0)] \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

よって,(2.35) を得る。

この (2.35) を先の部分積分の結果に適用すると,

$$\int_0^1 wuL[u]dx \geq \int_0^1 w(u')^2 dx + \int_0^1 \underline{c}wu^2 dx$$

ここで, $w_0 \equiv \min_{x\in[0,1]} w(x)$ と定めると,

$$\int_0^1 wuL[u]dx \geq w_0 \|u'\|_2^2 + \underline{c}\|\sqrt{w}u\|_2^2 \qquad (5)$$

$\max_{x\in[0,1]} w(x) = \begin{cases} 1 & (A \geq 0) \\ e^{-\frac{1}{2}A} & (A < 0) \end{cases}$ だから, $w \leq w_0 E^2$, 即ち

$$\sqrt{\frac{w}{w_0}} \leq E \qquad (6)$$

次に, $\mu \equiv \frac{\|\sqrt{\frac{w}{w_0}}u\|_2}{\|L[u]\|_2}$ と定めると,

$$\|L[u]\|_2\mu = \|\sqrt{\frac{w}{w_0}}u\|_2 \qquad (7)$$

(5) の両辺を $w_0 > 0$ で割ると,

$$\int_0^1 \frac{w}{w_0}uL[u]dx \geq \|u'\|_2^2 + \underline{c}\|\sqrt{\frac{w}{w_0}}u\|_2^2$$

(6),(7) を用いてこれを整理すると,

$$\begin{aligned}\|u'\|_2^2 &\leq \int_0^1 E\sqrt{\frac{w}{w_0}}uL[u]dx - \underline{c}\|L[u]\|_2^2\mu^2 \\ &\leq E\|\sqrt{\tfrac{w}{w_0}}u\|_2\|L[u]\|_2 - \underline{c}\|L[u]\|_2^2\mu^2 \\ &\leq \mu(E - \underline{c}\mu)\|L[u]\|_2^2\end{aligned}$$

仮定であった (2.31) より,

$$0 \leq \mu \leq \frac{\|Eu\|_2}{\|L[u]\|_2} \leq EK_0$$

従って, $f(\mu) \equiv \mu(E - \underline{c}\mu)$ と定めた関数 $f(\mu)$ に対して, $K_1^2 \equiv \max_{\mu\in[0,EK_0]} f(\mu)$ とすれば, 求める不等式が得られる。□

この $Lemma\ 2.5$ によって, 定数 K_1の計算方法が示された。定数 K_2の計算方法は, 次の $Lemma\ 2.6$ 及び $Lemma\ 2.7$ で示す。

Lemma 6 (2.31) と (2.32) が成り立つような定数 K_0と K_1が存在すると仮定する。更に,(A) $Sturm - Liouville$ 型線形境界条件の場合, と (B) 周期的境界条件の場合, の二つに分けて次の条件が成り立つと仮定する。

(A) $Sturm - Liouville$ 型線形境界条件の場合

$$\begin{cases} \gamma_0^2 b_0 + 2\alpha_0\gamma_0 c_0 - \alpha_0^2 b_0 c_0 & \geq 0 \\ -\gamma_1^2 b_0 + 2\alpha_1\gamma_1 c_0 + \alpha_1^2 b_0 c_0 & \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つような実数 $b_0, c_0 \in \mathbf{R}$ が存在する。

(B) 周期的境界条件の場合

b_0, c_0は実数である。

このとき, 次の式で定めた定数 K_2に対して,(2.33) が成り立つ。即ち,

$\|u''\|_2 \leq K_2\|L[u]\|_2$
$for\ K_2 \equiv [(1 + \|b - b_0\|_\infty K_1 + \|c - c_0\|_\infty K_0)^2 + \max\{0, -b_0^2 - 2c_0\}K_1^2]^{\frac{1}{2}}$

[証明] 任意の $u \in R$ に対して,

$$\begin{aligned}&\| - u'' + b_0u' + c_0u\|_2^2 \\ =\ &\int_0^1 \{(u'')^2 + b_0^2(u')^2 + c_0^2u^2 - 2b_0u'u'' + 2b_0c_0uu' - 2c_0uu''\}dx \\ =\ &\|u''\|_2^2 + (b_0^2 + 2c_0)\|u'\|_2^2 + c_0^2\|u\|_2^2 + [-b_0(u')^2 - 2c_0uu' + b_0c_0u^2]_0^1\end{aligned}$$

そこで, 次の不等式を示す。

$$[-b_0(u')^2 - 2c_0uu' + b_0c_0u^2]_0^1 \geq 0 \qquad (2.36)$$

(A) $Sturm-Liouville$ 型線形境界条件の場合

$Lemma\ 2.5$ と同じ理由で, 次の三つの場合に分けて考える。

1) $\alpha_0 \neq 0,\ \alpha_1 \neq 0$ のとき

(2.21) より,

$$\begin{aligned} u'(0) &= \tfrac{\gamma_0}{\alpha_0}u(0) \qquad (1)\\ u'(1) &= -\tfrac{\gamma_1}{\alpha_1}u(1) \quad (2)\end{aligned}$$

(1),(2) と仮定より,

$$\begin{aligned} & [-b_0(u')^2 - 2c_0uu' + b_0c_0u^2]_0^1\\ =\ & \{-b_0(u(1))^2 - 2c_0u(1)u'(1) + b_0c_0(u(1))^2\}\\ & -\{-b_0(u(0))^2 - 2c_0u(0)u'(0) + b_0c_0(u(0))^2\}\\ =\ & -\tfrac{b_0\gamma_1^2}{\alpha_1^2}(u(1))^2 + \tfrac{2c_0\gamma_1}{\alpha_1}(u(1))^2 + b_0c_0(u(1))^2\\ & -\{-\tfrac{b_0\gamma_0^2}{\alpha_0^2}(u(0))^2 - \tfrac{2c_0\gamma_0}{\alpha_0}(u(0))^2 + b_0c_0(u(0))^2\}\\ =\ & \tfrac{(u(1))^2}{\alpha_1^2}(-\gamma_1^2b_0 + 2\alpha_1\gamma_1c_0 + \alpha_1^2b_0c_0) + \tfrac{(u(0))^2}{\alpha_0^2}(\gamma_0^2b_0 + 2\alpha_0\gamma_0c_0 - \alpha_0^2b_0c_0)\\ \geq\ & 0\end{aligned}$$

よって,(2.36) を得る。

2) $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 \neq 0$ のとき

$\alpha_0 = 0$ より, $u(0) = 0$

よって,$1)$ の計算と仮定より,(2.36) を得る。

3) $\alpha_0 \neq 0,\ \alpha_1 = 0$ のとき

$\alpha_1 = 0$ より, $u(1) = 0$

よって,$1)$ の計算と仮定より,(2.36) を得る。

以上から,(2.36) を得る。

(B) 周期的境界条件の場合

(2.22) より, $\quad u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1)$

よって,

$$[-b_0(u')^2 - 2c_0uu' + b_0c_0u^2]_0^1 = 0$$

従って,(2.36) を得る。

ゆえに, 先の部分積分の計算から, 仮定であった (2.31) と (2.32) を用いると,

$$\begin{aligned} \|u''\|_2^2 &\leq \|-u'' + b_0u' + c_0u\|_2^2 - (b_0^2 + 2c_0)\|u'\|_2^2\\ &\leq (\|L[u]\|_2 + \|(b_0 - b)u'\|_2 + \|(c_0 - c)u\|_2)^2 - (b_0^2 + 2c_0)\|u'\|_2^2\\ &\leq (\|L[u]\|_2 + \|(b - b_0)\|_\infty K_1\|L[u]\|_2 + \|(c - c_0)\|_\infty K_0\|L[u]\|_2)^2\\ &\quad +\max\{0, -(b_0^2 + 2c_0)\}K_1^2\|L[u]\|_2^2\\ &= [(1 + \|b - b_0\|_\infty K_1 + \|c - c_0\|_\infty K_0)^2 + \max\{0, -b_0^2 - 2c_0\}K_1^2]\ \|L[u]\|_2^2\\ &= K_2^2\|L[u]\|_2^2\end{aligned}$$

これから, 求める不等式が得られる。□

Lemma 7 (2.31) と (2.32) が成り立つような定数 K_0 と K_1 が存在すると仮定する。更に, 記号 p, q, $\beta[u,v]$, p_0, q_0 を,

$p \equiv b^2 + b' + 2c$
$q \equiv c^2 - c'' - (bc)'$
$\beta[u,v] \equiv [-bu'v' - c(u'v + uv') + (c' + bc)uv]_0^1 \quad for\ u, v \in R$
$p_0 : p$ の下界
$q_0 : q$の下界
で定め, 次の不等式が成り立つと仮定する。

$$\beta[u,u] \geq 0 \quad for\ \forall\ u \in R$$

このとき, 次の式で定めた定数 K_2に対して,(2.33) が成り立つ。即ち,

$$\|u''\|_2 \leq K_2 \|L[u]\|_2 \quad for\ K_2 \equiv [1 + \max\{0, -p_0\}K_1^2 + \max\{0, -q_0\}K_0^2]^{\frac{1}{2}}$$

[証明] 任意の $u \in R$ に対して, 仮定と記号の定義により,

$$\begin{aligned} \|L[u]\|_2^2 &= \int_0^1 (-u'' + bu' + cu)^2 dx \\ &= \int_0^1 (u'')^2 dx + \int_0^1 p(u')^2 dx + \int_0^1 qu^2 dx + \beta[u,u] \\ &\geq \|u''\|_2^2 + p_0\|u'\|_2^2 + q_0\|u\|_2^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \|u''\|_2^2 &\leq \|L[u]\|_2^2 - p_0\|u'\|_2^2 - q_0\|u\|_2^2 \\ &\leq \|L[u]\|_2^2 + \max\{0, -p_0\}K_1^2\|L[u]\|_2^2 + \max\{0, -q_0\}K_0^2\|L[u]\|_2^2 \\ &= [1 + \max\{0, -p_0\}K_1^2 + \max\{0, -q_0\}K_0^2]\|L[u]\|_2^2 \\ &= K_2^2\|L[u]\|_2^2 \end{aligned}$$

これから, 求める不等式が得られる。□

上記の $Lemma\ 2.6$ と $Lemma\ 2.7$ で求められた二通りの定数 K_2の値に対して, その小さい方を改めて K_2ととると, $Lemma\ 2.5$ と $Lemma\ 2.6$ から, $Assumption\ 2.2$ の定数 Kと K'の値を計算することができる。こうして $Theorem\ 2.3$ の仮定が確かめられ, 境界値問題 (2.20) の解の存在とその包含について検証できる。

2.2.4 数値的検証例

次のような境界値問題を考える。

$$\begin{cases} -U'' &= \lambda U[1 - \frac{1}{2}(U')^2 - \frac{1}{8}(U')^4] \quad on\ (0,1) \\ U(0) = U'(1) &= 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

2.2.2 節の $Newton$ の選点法において, $M = 80,\ N = 2m,\ C = \sqrt{2}$ で近似解の計算を行う。このとき, $\lambda = 3$, 近似解 ωに対して, Plum の方法を適用すると, $\omega(1) \approx 0.625,\ \delta = 2.74 \times 10^{-12},\ K = 1.627,\ K' = 6.118,\ \alpha = 0.445 \times 10^{-12},\ \beta = 0.168 \times 10^{-11}$であるという検証結果が得られている。

2.3 Schröder の方法

文献 [22] に従い, Schröder の方法を以下で解説する。

ここでは,2 階境界値問題を考える。2.3.1 節で次節のための準備を行い, 2.3.2 節で解の存在とその包含に関する定理を証明する。2.3.3 節では,解の存在を検証するのに必要な $algorithm\ (EB\ algorithm)$ を構成する。このとき, 解の存在を証明する $algorithm$ は近似解の計算とは別々に考えることになる。

最初に, この節で用いる諸記号について説明する。

Definition 4 (1) 関数 $u : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ が k回連続微分可能であるとき, これを $u \in C_k^n[a,b]$ とかく。微分可能性を考慮しない場合は, 単に $u \in \mathbf{R}^n[a,b]$ とかく。
(2) 順序つけられた $\mathbf{R}$ の点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1}$ に対して, $C_{0,k}^n[x_0,...,x_{m+1}]$ を次で定義する。

$$C_{0,k}^n[x_0,...,x_{m+1}] \equiv \{u \in C_0^n[x_0,x_{m+1}] \mid u|_{[x_j,x_{j+1}]} \in C_k^n[x_j,x_{j+1}]\ (j=0,...,m)\}$$

更に, 行列値関数 $u = (u_i)$ に対して, $u_i \in C_k^n[a,b]\ (i=1,...,n)$ であるとき, これを $u \in C_k^{n,n}[a,b]$ とかく。

また, 先と同様に, $C_{0,k}^{n,n}[x_0,...,x_{m+1}]$ を次で定義する。

$$C_{0,k}^{n,n}[x_0,...,x_{m+1}] \equiv \{u \in C_0^{n,n}[x_0,x_{m+1}]|\ u|_{[x_j,x_{j+1}]} \in C_k^{n,n}[x_j,x_{j+1}]\ (j=0,...,m)\}$$

(3) 行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, $a_{ij} \geq 0\ (i=1,...,n,\ j=1,...,n)$ であるとき, これを $A \geq 0$ とかく。更に, 行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, A の対角成分 A^dとそれ以外の成分 A^cを次で定義する。

$$\begin{aligned} A^d &\equiv (a_{ij}\delta_{ij}) \quad (\delta_{ij}\text{は } Kronecker\text{のデルタ}) \\ A^c &\equiv A - A^d \end{aligned}$$

このとき, 行列 A は, $A = A^d + A^c$とかくことができる。
(4) $\varphi \leq \psi$である関数 $\varphi,\ \psi,\ u \in C_0^n[0,1]$ に対して, $[\varphi,\psi]$ 及び$< \varphi,u,\psi >$を次で定義する。

$$\begin{aligned} [\varphi,\psi] &\equiv \{\ v \in C_0^n[0,1] \mid \varphi \leq v \leq \psi\ \} \\ < \varphi,u,\psi > &\equiv \sup\{\varphi, \inf\{u,\psi\}\} \end{aligned}$$

2.3.1 breakpoint を用いた問題の変換

最初に, 微分作用素の変換について説明をする。
まず, $R \equiv C_2^n[0,1]$ と定義して, R 上の微分作用素 A を次で定義する。ただし, $u \in R$ である。

$$(Au) \equiv \begin{cases} L[u](x) \equiv -u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) & for\ x \in (0,1) \\ B_0[u](x) \equiv -\alpha^0 u'(0) + \Gamma^0 u(0) & for\ x = 0 \\ B_1[u](x) \equiv \alpha^1 u'(1) + \Gamma^1 u(1) & for\ x = 1 \end{cases} \tag{2.38}$$

ただし, 行列値関数 B, C 及び行列 $\alpha^0, \alpha^1, \Gamma^0, \Gamma^1 \in M_n(\mathbf{R})$ は, 次の通りである。

$B \in C_1^{n,n}[0,1]$, $C \in C_0^{n,n}[0,1]$
α^0 , α^1 : 対角成分が 0 もしくは 1 である対角行列
$\Gamma^\sigma \equiv \beta^\sigma + \alpha^\sigma \Gamma^\sigma \alpha^\sigma \quad (\sigma \in \{0,1\})$
$\beta^\sigma \equiv I - \alpha^\sigma \quad (\sigma \in \{0,1\},\ I \in M_n(\mathbf{R})$ は単位行列)

(2.38) で定義された微分作用素 $A = (L, B_0, B_1)$ に対して, その随伴微分作用素 $A^* = (L^*, B_0^*, B_1^*)$ を考える。ここで, 各 L^*, B_0^*, B_1^*は次の通りである。ただし, 添字 Tは転置行列を表すものと

する。

$$\left\{\begin{array}{lcl} L^*[u](x) & \equiv & -(u'(x)+B^T(x)u(x))'+C^T(x)u(x) \\ B_\sigma[u](x) & \equiv & (-1)^{\sigma+1}\alpha^\sigma[u'(\sigma)+B^T(\sigma)\alpha^\sigma u(\sigma)]+(\Gamma^\sigma)^T u(\sigma) \quad (\sigma\in\{0,1\}) \end{array}\right.$$

次に, 変換作用素を構成するために, 以下のような点をとる。点 x_{ij}は, **breakpoint** と呼ばれる。

$$0\equiv x_{i,0}<x_{i,1}<\cdots<x_{i,m_i}<x_{i,m_i+1}\equiv 1 \quad (i=1,...,n)$$

これらの点に対して, 各集合 ξ_i , J, ξを次で定義する。

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi_i & \equiv & \{\ x_{ij}\mid\ j=1,...,m_i\ \} \\ J & \equiv & \{\ (i,j)\mid\ i=1,...,n,\ j=1,...,m_i\ \} \\ \xi & \equiv & \{\ x_{ij}\mid\ (i,j)\in J\ \} \end{array}\right.$$

更に, 各集合 $\tau, S, \mathcal{R}$ を次で定義する。

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tau\equiv\bigcup_{i=1}^{n}\xi_i & : & jump \text{ が起きている点全体の集合} \\ S=S_\xi & : & \text{各成分 } u_i\text{が点 } \xi_i\text{で } jump \text{ をもつ区間 } [0,1] \text{ 上の} \\ & & \text{区分的連続関数 } u\in C_0^n[0,1] \text{ 全体の集合} \\ \mathcal{R} & : & u'\in S \text{ かつ } u''\text{が } \tau\text{上のみで } jump \text{ をもつ区間 } [0,1] \\ & & \text{上の区分的連続関数 } u\in C_0^n[0,1] \text{ 全体の集合} \end{array}\right.$$

これらのことを基に,(2.38) の微分作用素 A の変換作用素 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\xi$を次で定義する。

$$(\mathcal{A}u)_i(x)\equiv\left\{\begin{array}{ll} (\mathcal{A}u)_i(x) & for\ x\in[0,1]-\xi_i \\ u_i(x) & for\ x\in\xi_i \end{array}\right. \tag{2.39}$$

随伴微分作用素 A^*を $R^*\equiv\{\ v\in C_1^n[0,1]\mid\ v'+B^Tv\in C_1^n[0,1]\ \}$ 上で定義すると, A^*に対する変換作用素 $\mathcal{A}^*$は $\mathcal{R}$ 上で定義される。

また, $L, B_0, B_1, A, \mathcal{A}$ などに対して, 対角成分を定義できる。このとき, $\mathcal{A}$ が A に対応する変換行列であることがわかる。

以上のことを基に, 次の 2 階線形境界値問題を考える。

問題 I

$$\begin{array}{l} Find\ \ u\in R\ \ such\ \ that\ \ Au=r \\ r(x)\equiv\left\{\begin{array}{lll} d(x) & for\ x\in(0,1) & d\in C_0^n[0,1] \\ d^0(x) & for\ x=0 & d^0\in\mathbf{R} \\ d^1(x) & for\ x=1 & d^1\in\mathbf{R} \end{array}\right. \end{array} \tag{2.40}$$

この問題を, 変換行列 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\xi$と ξ を含む問題に変換するのが目的である。そこで, 次のような **breakpoint function** と呼ばれる関数 h^{ij}を定義して, これを導入する。

$h^{ij}\in C_{0,2}^n[0,x_{ij},1]\ \ such\ \ that\ \ (h^{ij})'(x_{ij}-0)-(h^{ij})'(x_{ij}+0)=e_i$
(e_iは i 番目の成分が 1 である単位ベクトル)

更に, $breakpoint\ function$ の族 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\xi$を次で定義する。

$$\mathcal{H}\equiv\{\ h^{ij}\mid(i,j)\in J\ \}$$

ここで, 族 $\mathcal{H}$は次の条件 (U) を満たすものと仮定する。その必要性は, $Lemma\ 2.8$ で明らかとなる。

条件 (U)

任意の $h=(h_1,...,h_n)\in\mathcal{H}$とある $q=(q_1,...,q_n)\in\mathbf{R}^n[0,1]$ に対して,

$$< h,q >\equiv \sum_{(i,j)\in J} h_i(x_{ij})q_i(x_{ij})=0$$

であるならば, $q_i(x_{ij})=0 \quad for\ \forall\ (i,j)\in J$ が成り立つ。

次に, 方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} L^*[h](x) &=& 0 \qquad for\ x\in(0,1)-\xi \\ B_0^*[h](x)=B_1^*[h](x) &=& 0 \end{array}\right. \tag{2.41}$$

は, $breakpoint\ function$ の定義から, $h\equiv h^{ij}$が境界値問題 (2.41) の近似解であることを示している。

$h\in\mathcal{H}$と $u\in\mathcal{R}$ に対して, 次の部分積分を行って, 整理すると,

$$\begin{array}{rl} & \int_0^1 h^T L[u]dx-\int_0^1 (L^*[h])^T u dx \\ = & Q[h,u](1)-Q[h,u](0)+[h'(x_{ij}-0)-h'(x_{ij}+0)]^T u(x_{ij})+< h,q > \end{array} \tag{2.42}$$

ただし,

$$\left\{\begin{array}{rcl} q_i(x_{ij}) &=& u_i'(x_{ij}+0)-u_i'(x_{ij}-0) \quad (\sigma\in\{0,1\}) \\ (-1)^\sigma Q[h,u](\sigma) &\equiv& (l_\sigma^*[h])^T B_\sigma[u]-(B_\sigma^*[h])^T l_\sigma[u] \\ l_\sigma^*[h] &\equiv& (-1)^\sigma\beta^\sigma[h'+B^T h](\sigma)+\alpha^\sigma h(\sigma) \\ l_\sigma[u] &\equiv& l_\sigma(u,u') \\ l_\sigma(v,w) &\equiv& (-1)^\sigma\beta^\sigma[w-B\alpha^\sigma u](\sigma)+\alpha^\sigma v(\sigma) \end{array}\right.$$

ここで, もし u が R 内の解であると仮定すると, 次が成り立つ。

$$u_i(x_{ij})=\mathcal{P}[h,r]-l[h,u] \quad for\ \forall\ (i,j)\in J$$

ただし, $\mathcal{P}[h,r]$ と $l[h,u]\equiv l(h,u,u')$ は次で定義するものとする。

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{P}[h,r] &\equiv& (l_0^*[h])^T d^0+(l_1^*[h])^T d^1+\int_0^1 h^T d dx \\ l(h,u,u') &\equiv& (B_0^*[h])^T l_0(v,w)+(B_1^*[h])^T l_0(v,w)+\int_0^1 (L^*[h])^T v dx \end{array}\right.$$

以上のことから, 問題 I を次のような問題 II に変換することができる。

問題 II

$$\begin{array}{l} Find\ \ u\in\mathcal{R}\ \ such\ \ that\ \ \mathcal{A}u+\mathcal{L}u=\mathcal{P}_r \\ \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{L}_i(x)=0 & (\mathcal{P}_r)_i(x)=r_i(x) \quad for\ x\in[0,1]-\xi_i \\ \mathcal{L}_i(x)=l[h,u] & (\mathcal{P}_r)_i(x)=\mathcal{P}[h,r] \quad for\ x=x_{ij} \end{array}\right. \end{array} \tag{2.43}$$

ここで, 以上のことに関して, 次の $Lemma\ 2.8$ が成り立つ。

Lemma 8 (問題 II の解が問題 I の解になるための条件)
問題 I の各解 $u\in R$ が (2.43) を満たして, $breakpoint\ function$ の族 $\mathcal{H}$が条件 (U) を満たすと仮定する。

このとき, 問題 II の解 $u\in\mathcal{R}$ に対して, $u\in R$ であり, かつ $u\in R$ は (2.40) を満たす。

[証明] 仮定から, 問題 II の解 $u\in\mathcal{R}$ が (2.40) を満たすことは,(2.42) 以後の同値変形から導かれる。

従って, $u\in R$ を示せば十分である。
問題 II の解 $u\in\mathcal{R}$ に対して,(2.42) と (2.43) より,

$$< h,q >=0 \quad for\ \forall\ h\in\mathcal{H},\ \exists\ q\in\mathbf{R}^n[0,1]$$

(U) より, $\quad q_i(x_{ij}) = 0 \quad for\ \forall\ (i,j) \in J$
よって, 微分の定義から, $u \in C_1^n[0,1]$
(2.43) の微分方程式から, $u_i'' \in C_0^n[0,1]$ 即ち, $u \in C_2^n[0,1] = R$ □

2 階線形境界値問題の場合と同様に, 2 階非線形境界値問題の変換について考える。

問題 III

$$
\begin{array}{l}
Find\ \ u \in R\ \ such\ \ that\ \ \mathcal{M}u = r(x) \quad x \in [0,1] \\
Mu(x) \equiv Au(x) + Nu(x) \quad (\ A \text{ は線形作用素}, \ N \text{は非線形作用素}) \\
Nu(x) \equiv F(x, u(x), u'(x)) \\
F(x,y,p) \equiv \left\{ \begin{array}{lll} f(x,y,p) & for\ x \in (0,1) & f : [0,1] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \\ f^0(y) & for\ x = 0 & f^0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \\ f^1(y) & for\ x = 1 & f^1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \end{array} \right.
\end{array}
\tag{2.44}
$$

問題 III は, 線形境界値問題の場合と同様に, 次の問題 IV に変換することができる。

問題 IV

$$
\begin{array}{l}
Find\ \ u \in \mathcal{R}\ \ such\ \ that\ \ \mathcal{M}u = \mathcal{P}_r \\
\mathcal{M}(x) \equiv \mathcal{A}(x) + \mathcal{L}(x) + \mathcal{P}_N(x)
\end{array}
\tag{2.45}
$$

ただし, $\mathcal{A}(x), \mathcal{L}(x), \mathcal{P}_r(x)$ は (2.43) と同一のものであり, $\mathcal{P}_N(x)$ は非線形作用素 Nによって決まるものである。

また, 証明はしないが, $Lemma\ 2.8$ と同様にして, 次の $Lemma\ 2.9$ が成り立つ。

Lemma 9 問題 III と問題 IV は, 条件 (U) の下に同値である。

2.3.2 解の存在とその包含に関する定理

一般の 2 階非線形境界値問題問題 III について, 解の存在とその包含 (誤差限界) に関する定理を示すのがこの節の目的である。解の誤差限界については, 両側限界と各点ノルム限界の二通りの限界を求める。

まず, 定理を示す前に, その準備として, 諸記号について定義をする。

最初に, 解の含まれる値域 $K(x)$ を次の二つの場合に制限する。

(A) $K(x) \equiv \{\ y \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) \le y \le \psi(x)\ \}$
$\quad for\ \varphi\ ,\ \psi \in \mathcal{R}\ \ such\ \ that\ \ \varphi \le \psi$

(B) $K(x) \equiv \{\ y \in \mathbf{R}^n \mid \|y\| \le \psi(x)\ \}$
$\quad for\ \psi \in C_{0,2}^1[0, x_1, ..., x_m, 1]\ \ such\ \ that\ \ \psi \ge 0$
$\quad$(ただし, $\|\cdots\|$ は $Euclid$ ノルムを表すものとする。)

このとき, 集合 Kを次で定義する。

$$K \equiv \{\ w \in C_0^n[0,1] \mid w \in K(x)\ \ for\ x \in [0,1]\ \}$$

特に,(A) の場合, $K = [\varphi, \psi]$ とかくことにする。

次に, 以下で述べる $Theorem\ 2.4$ で必要な集合 $W(x)$ を次の二つの場合に制限して, これを定義する。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{C}) \quad W(x) \equiv \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid \Phi(x) \le y \le \Psi(x) \,\} \\
&\qquad for\ \Phi\ ,\ \Psi \in C_0^n[0,1]\ \ such\ \ that\ \ \Phi \le \Psi \\
&(\mathrm{D}) \quad W(x) \equiv \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid \|y\| \le \Psi(x) \,\} \\
&\qquad for\ \Psi \in C_0[0, x_1, ..., x_m, 1]\ \ such\ \ that\ \ \Psi \ge 0
\end{aligned}
$$

このとき, 集合 Wを次で定義する。

$$
W \equiv \{\, w \in S \mid w \in W(x)\ \ for\ x \in [0,1] \,\}
$$

ここで,(A) と (B) の場合について, 任意の $w \in \mathbf{R}^n[0,1]$ に対して, **truncation function** と呼ばれる関数 $\hat{w}$ を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{C}) \quad \hat{w} \equiv < \Phi(x), w, \Psi(x) > \\
&(\mathrm{D}) \quad \hat{w} \equiv \begin{cases} w(x) & if\ \|w(x)\| \le \Psi(x) \\ \frac{w(x)}{\|w(x)\|}\Psi(x) & if\ \|w(x)\| > \Psi(x) \end{cases}
\end{aligned}
$$

特に, このとき, $\hat{w}(x) \in W(x)$ である。
更に, **u'-truncation operator** と呼ばれる作用素 $\hat{M}$と $\hat{\mathcal{M}}$, 及び $\overline{M}$と $\overline{\mathcal{M}}$を次で定義する。

$$
\begin{cases}
Mu(x) &=& \hat{M}u(x) = \overline{M}u(x) & for\ x \in \{0,1\} \\
\hat{M}u(x) &=& (A^d u)(x) + B^c(x)\hat{u}'(x) + C^c(x)u(x) + f(x,u,\hat{u}') & for\ x \in (0,1) \\
\overline{M}u(x) &=& (Au)(x) + f(x,u,\hat{u}') & for\ x \in (0,1) \\
\hat{\mathcal{M}}_i u(x) &=& (A^d u)(x) + B^c(x)\hat{u}'(x) + C^c(x)u(x) + f(x,u,\hat{u}') & for\ x \in (0,1) - \xi_i \\
\overline{\mathcal{M}}_i u(x) &=& (Au)(x) + f(x,u,\hat{u}') & for\ x \in (0,1) - \xi_i
\end{cases}
$$

また, $\varphi' \in W,\ \psi' \in W$を仮定して, 関数 $\overline{F} = (\overline{F}_1, ..., \overline{F}_n)$

$$
\overline{F} : [0,1] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times C_0^n[0,1] \times S \to \mathbf{R}^n
$$

を次で定義する。

$$
Mu(x) \equiv Au(x) + \overline{F}(x, u(x), u'(x), u, u')
$$

以上の定義をもとに, 問題 III の両側限界についての解の存在とその包含について, 次の $Theorem\ 2.4$ が成り立つ。

Theorem 9 以下の条件 1) $\sim$ 4) を仮定する。

1) *the differential inequalities*

$$
\begin{aligned}
&(L^d[\varphi] + B^d w + C^c v)_i(x) + \overline{F}_i(x, \varphi(x), \varphi'(x), v, w) \le d_i(x) \\
&(L^d[\psi] + B^d w + C^c v)_i(x) + \overline{F}_i(x, \psi(x), \psi'(x), v, w) \ge d_i(x) \\
&for\ i \in \{1, ..., n\},\ x \in (0,1) - \xi_i,\ v \in [\varphi, \psi],\ w \in W
\end{aligned}
$$

2) *the boundary inequalities*

$$
\begin{aligned}
&(B_\sigma^d)[\varphi] + (\Gamma^\sigma)^c v(\sigma))_i + \overline{F}_i(\sigma, \varphi(\sigma), v) \le d_i^\sigma \\
&(B_\sigma^d)[\psi] + (\Gamma^\sigma)^c v(\sigma))_i + \overline{F}_i(\sigma, \psi(\sigma), v) \ge d_i^\sigma \\
&for\ i \in \{1, ..., n\},\ \sigma \in \{0,1\},\ v \in [\varphi, \psi]
\end{aligned}
$$

3) *the breakpoint conditions*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_i(x_{ij}) \le \mathcal{P}[h^{ij}, r - F(v,w)] - l(h^{ij}, v, w) \le \psi_i(x_{ij}) \\
&for\ \forall\ (i,j) \in J,\ v \in [\varphi, \psi],\ w \in W
\end{aligned}
$$

4) *the derivative restriction*

$$
u \in \mathcal{R} \cap K,\ \hat{\mathcal{M}}u = \mathcal{P}_r \Longrightarrow u' \in W
$$

このとき, 問題 III は, $u^* \in [\varphi, \psi]$, $(u^*)' \in W$ であるような解 $u^* \in R$ をもつ。

[証明] 次のように,5 段階に分けて証明を行う。
(第 1 段階)
　まず, $x \in [0,1]$, $y, p \in \mathbf{R}^n$, $v \in C_0^n[0,1]$, $w \in S$ に対して, 次で関数 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n)$ を定義する。

$$\mathcal{F}_i(x,y,p,v,w) \equiv \begin{cases} (B^c(x)w(x) + C^c(x)v(x))_i + \overline{F}_i(x,y,p,v,w) & if\ x \in (0,1) - \xi_i \\ ((\Gamma)^\sigma)^c v(x))_i + \overline{F}_i(x,y,v) & if\ x = \sigma \in \{0,1\} \\ l(h^{ij}, v, w) + \mathcal{P}[h^{ij}, F(v,w)] & if\ x = x_{ij} \end{cases}$$

このように関数 $\mathcal{F}$ を定義すると, 次が成り立つ。

$$\begin{cases} \mathcal{M}u(x) &= \mathcal{A}^d u(x) + \mathcal{F}(x, u(x), u'(x), u, u') \quad for\ x \in [0,1] \\ \hat{\mathcal{M}}u(x) &= \mathcal{A}^d u(x) + \mathcal{F}(x, u(x), \hat{u}'(x), u, \hat{u}') \quad for\ x \in [0,1] \end{cases}$$

次に, **u-u'-truncation operator** と呼ばれる作用素 $\mathcal{M}^\sharp$ を次で定義する。

$$\begin{cases} \mathcal{M}^\sharp u(x) &\equiv \mathcal{A}^d u(x) + cu(x) + \mathcal{B}u(x) \\ \mathcal{B}u(x) &\equiv -cu^\sharp(x) + \mathcal{F}(x, u^\sharp(x), u'(x), u^\sharp, u') \\ u^\sharp &\equiv < \varphi, u, \psi > \end{cases}$$

ただし正定数 $c > 0$ は非常に値が大きく, かつ次の式を満たすものとする。

$$(\mathcal{A}_\zeta^d + c\zeta)_i(x) > 0 \quad for\ x \in [0,1],\ i \in \{1, ..., n\},\ \zeta \equiv (1, ..., 1) \in \mathbf{R}^n \qquad (2.46)$$

このとき,(2.46) は $Green$ 作用素の存在を保証している。これは,(第 3 段階) で利用される。

(第 2 段階)
　次の命題を示す。

Proposition 4　$\mathcal{M}^\sharp \rho = \mathcal{P}_r$ が成り立つような $\rho \in \mathcal{R}$ が存在すれば, この $\rho \in \mathcal{R}$ に対して, $\rho \in [\varphi, \psi]$ が成り立つ。
[証明] まず, $\mathcal{R}$ 上の作用素 $\tilde{\mathcal{M}}$ を次で定義する。

$$\tilde{\mathcal{M}}u(x) \equiv \mathcal{A}^d u(x) + cu(x) - cu^\sharp(x) + \mathcal{F}(x, u^\sharp(x), u'(x), \rho^\sharp, \rho')$$

このとき, $\tilde{\mathcal{M}}u(x)$ の第 i 成分は u の第 i 成分に依存するので, 次のような作用素 $\tilde{\mathcal{M}}_i$ を定義することができる。

$$(\tilde{\mathcal{M}})_i u(x) \equiv \tilde{\mathcal{M}}_i u_i$$

$\mathcal{M}^\sharp$ の定義と $\tilde{\mathcal{M}}$ の定義から,　$\mathcal{M}^\sharp \rho = \tilde{\mathcal{M}}\rho$
よって, 求める結論を得るためには, 次の式を示せば十分である。

$$\tilde{\mathcal{M}}_i \rho_i = \mathcal{P}_r \implies \varphi_i \le \rho_i \le \psi_i \quad for\ \forall\ i \in \{1, ..., n\}$$

これは,[21] にその証明方法が記されているので, ここでは省略する。
従って, $\rho \in [\varphi, \psi]$ □

(第 3 段階)
　次の命題を示す。

Proposition 5 作用素 $\mathcal{A}^d + cI$は, $\mathcal{R}$ 上で可逆である。即ち,

$$\exists\ (\mathcal{A}^d + cI)^{-1}\ \ on\ \mathcal{R}$$

ただし, $I \in M_n(\mathbf{R})$ は単位行列を表すものとする。
[証明] $(\mathcal{A}^d + cI)u$ の第 i 成分は u の第 i 成分に依存するので,

$$(\mathcal{A}^d + cI)_i \equiv (\mathcal{A}^d + cI)_i u_i$$

で定義される作用素 $(\mathcal{A}^d + cI)_i$が任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対して, $\mathcal{R}$ 上で可逆であることを示せばよい。
(2.46) と $[21]$ によって, $(\mathcal{A}^d + cI)_i$は $inverse - positive$ である。
従って, $\exists\ (\mathcal{A}^d + cI)_i^{-1}\ \ on\ \mathcal{R}$ □

(第 4 段階)
次の命題を示す。

Proposition 6 方程式 $\mathcal{M}^\sharp u = \mathcal{P}_r$は, 解 $u^* \in \mathcal{R}$ をもつ。
[証明] 集合 Xを次で定義する。

$$X \equiv \{\ u \in C_0^n[0,1] \mid u_i \in C_{0,1}[0, x_{i,1}, ..., x_{i,m}, 1]\ \}$$

この Xの元 $u \in X$に, ノルム $\|u\|_X \equiv \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ を導入すると,
$(X,\ \|\cdot\|_X)$ は $Banach$ 空間となる。
(第 3 段階) の $Proposition\ 2.2$ によって, 次のような作用素 Tを定義できる。

$$Tu \equiv (\mathcal{A}^d + cI)^{-1}(\mathcal{P}_r - \mathcal{B}u) \qquad for\ \forall\ u \in X$$

$Green$ 作用素がコンパクト作用素であることから, 写像

$$T : X \to \mathcal{R}\ \subset X$$

連続なコンパクト作用素となる。
よって, 集合 TXは Xのコンパクト集合となる。
従って, $Schauder$の不動点定理により, $Tu^* = u^*$が成り立つような点 $u^* \in X$が存在する。
Tの定義から, $u^* = Tu^* \in \mathcal{R}$
$Tu^* = u^*$から,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^d u^* + cu^* &= \mathcal{P}_r - \mathcal{B}u^* \\ \mathcal{A}^d u^* + cu^* + \mathcal{B}u^* &= \mathcal{P}_r \\ \mathcal{M}^\sharp u^* &= \mathcal{P}_r \end{aligned}$$

ゆえに, 求める結論を得る。□

(第 5 段階)
以上のことをもとに, $u^* \in \mathcal{R}$ が本定理の結論の性質をもつことを示す。

(第 2 段階) の $Proposition\ 2.1$ と (第 4 段階) の $Proposition\ 2.3$ より,
$u^* \in \mathcal{R}$ であり, かつ $u^* \in [\varphi, \psi]$ である。
ゆえに,

$$
\begin{aligned}
(u^*)^\sharp &= <\varphi, u^*, \psi> = u^* \\
\hat{u}^* &= <\varphi, u^*, \psi> = u^*
\end{aligned}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^\sharp u^*(x) &= \mathcal{A}^d u^*(x) + \mathcal{F}(x, (u^*)^\sharp(x), (u^*)'(x), (u^*)^\sharp, (u^*)') \\
&= \mathcal{A}^d u^*(x) + \mathcal{F}(x, u^*(x), (u^*)'(x), u^*, (u^*)') \\
\hat{\mathcal{M}} u^*(x) &= \mathcal{A}^d u^*(x) + \mathcal{F}(x, u^*(x), (\hat{u}^*)'(x), u^*, (\hat{u}^*)') \\
&= \mathcal{A}^d u^*(x) + \mathcal{F}(x, u^*(x), (u^*)'(x), u^*, (u^*)')
\end{aligned}
$$

よって, $\mathcal{M}^\sharp u^* = \hat{\mathcal{M}} u^*$
(第 4 段階) の $Proposition\ 2.3$ より, $\mathcal{M}^\sharp u^* = \hat{\mathcal{M}} u^* = \mathcal{P}_r$
また,(第 4 段階) の $Proposition\ 2.3$ より, $u^* \in \mathcal{R} \cap K$ だから,
仮定 4) から, $(u^*)' \in W$
ゆえに,

$$
\exists\ u^* \in \mathcal{R} \cap K \ \ such\ \ that\ \ \mathcal{M} u^* = \hat{\mathcal{M}} u^* = \mathcal{P}_r\ ,\ u^* \in [\varphi, \psi]\ ,\ (u^*)' \in W
$$

$Lemma\ 2.9$ より, 問題 III と問題 IV は同値なので, 求める結論を得る。□

次に, 問題 III の各点ノルム限界についての解の存在とその包含について, 次の $Theorem\ 2.5$ が成り立つ。

Theorem 10 行列 α^0及び α^1と行列値関数 $H^j(x) \equiv (h^{1j}(x), ..., h^{nj}(x)) \in C_2^{n,n}[0, x_j, 1]\ (j = 1, ..., m)$ に対して, 次のことが成り立つと仮定する。

$$
\begin{cases}
\alpha^0 = \alpha^1 = 0 \\
\beta^0 H^j(0) = 0,\ \beta^1 H^j(1) = 0
\end{cases}
$$

更に, 以下の 1) $\sim$ 4) を仮定する。

1) $the\ \ differential\ \ inequalities$

$$
\begin{aligned}
&-\psi''(x) + <\eta, B(x)\eta> \psi'(x) + Q(x, \eta, q)\psi(x) - \|f(x, y, p)\| \geq \|d(x)\| \\
&for\ x \in (0, 1) - \xi\ ,\ \eta \in \mathbf{R}^n,\ q \in \mathbf{R}^n\ \ such\ \ that\ \ \|\eta\| = 1,\ <\eta,\ q> = 0 \\
&\quad y \in K(x),\ p \in W(x) \\
&\quad Q(x, \eta, q) \equiv <q, q> + <\eta,\ B(x)q> + <\eta,\ C(x)\eta> \\
&\quad (\text{ただし}, <\ ,\ > \text{は}, \mathbf{R}^n \text{の内積を表す。})
\end{aligned}
$$

2) $the\ \ boundary\ \ inequalities$

$$
\begin{aligned}
&\psi(0) \geq \|d^0\| \\
&\psi(1) \geq \|d^1\|
\end{aligned}
$$

3) $the\ \ breakpoint\ \ conditions$

$$
\begin{aligned}
&\psi_i(x_{ij}) \geq \|l[H^j, v]\| + \|\mathcal{P}[H^j, r]\| + \|\mathcal{P}[H^j, F(v, w)]\| \\
&for\ \forall\ j \in \{1, ..., n\},\ v \in K,\ w \in W
\end{aligned}
$$

4) $the\ \ derivative\ \ restriction$

$$
u \in \mathcal{R} \cap K,\ \overline{\mathcal{M}} u = \mathcal{P}_r \Longrightarrow u' \in W
$$

このとき, 問題 III は, $\|u^*\| \leq \psi\ ,\ (u^*)' \in W$であるような解 $u^* \in R$ をもつ。

[証明] $Theorem\ 2.5$ と同様に 5 段階に分けて証明を行う。詳細は,[22] の $Theorem\ 3.3$ を参照。□

上記の二つの定理によって,2 階非線形境界値問題である問題 III について, 解の存在とその包含について検証ができる。

最後に, 次節に関連した $Lemma\ 2.10$ と $Lemma\ 2.11$ を示す。このとき, 簡便のため,(A),(B),(C),(D) で使われている関数 $\varphi,\ \psi,\ \Phi,\ \Psi$を, 次の場合に制限するものとする。

$$\begin{cases} \varphi = -\psi & for\ \psi \in \mathcal{R}\ \ such\ \ that\ \ \psi \geq 0 \\ \Phi = -\Psi & for\ \Psi(x) \equiv \kappa \in \mathbf{R}^n,\ x \in [0,1],\ \kappa \geq 0 \end{cases}$$

また, $[a,b] \subseteq [0,1]$ と仮定する。

Lemma 10 次の式を満たすような正値ベクトル $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n),\ \delta = (\delta_1, ..., \delta_n),\ k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbf{R}^n$と正値正方行列 $\beta,\ \gamma \in M_n(\mathbf{R})$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} |\psi| \leq \nu\ ,\ |d| \leq \delta\ ,\ |B| \leq \beta\ ,\ |C| \leq \gamma & on\ (a,b) \\ |f(x,y,p)| \leq k & for\ x \in (a,b)\ ,\ |y| \leq \nu\ ,\ |p| \leq \kappa \end{cases} \tag{2.47}$$

更に, 任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対して, 次の式が成り立つと仮定する。ただし, $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_n) \in \mathbf{R}^n$である。

$$\begin{cases} \kappa_i^2 - 4\nu_i(\beta\kappa)_i & \geq & \Lambda_i^2 + 4\nu_i(\gamma\nu + k + \delta)_i \\ \Lambda_i & \geq & (b-a)^{-1}(\psi_i(a) + \psi_i(b)) \end{cases} \tag{2.48}$$

このとき,

$$(\hat{M}u)_i(x) = d_i(x),\ |u(x)| \leq \psi(x) \quad for\ x \in (a,b),\ i \in \{1, ..., n\}$$

を満たすような, 任意の関数 $u \in C_2^n[0,1]$ に対して, 次の式が成り立つ。

$$|u_i'(x)| \leq \kappa_i \quad for\ x \in [a,b],\ i \in \{1, ..., n\}$$

[証明] 背理法で証明する。

$$(\hat{M}u)_i(x) = d_i(x),\ |u(x)| \leq \psi(x) \quad for\ x \in (a,b),\ i \in \{1, ..., n\}$$

を満たす任意の関数 $u \in C_2^n[0,1]$ をとる。
そこで,

$$\kappa_i < |u_i'(t)| \equiv \overline{\kappa_i}$$

を満たすような点 $t \in (a,b)$ が存在すると仮定する。
このとき, $u_i'(x) = \overline{\kappa_i}$として差し支えない。($u_i'(x) = -\overline{\kappa_i}$のときも同様)
よって, 関数 u の性質から,

$$\frac{|u_i(a)| + |u_i(b)|}{b-a} \leq (b-a)^{-1}(\psi_i(a) + \psi_i(b)) \leq \Lambda_i$$

(2.48) より,

$$u_i'(s) \leq \Lambda_i \leq \kappa_i \leq \overline{\kappa_i}$$

を満たすような点 $s \in (a,b)$ が存在する。
このとき, $s < t$ として差し支えない。($s > t$ のときも同様)
従って,

$$\Lambda_i \leq u_i'(x) \leq \overline{\kappa_i} \quad for\ x \in (s,t)$$

としてよい。
(2.47) を $\hat{M}u(x) = r(x) \quad for\ x \in [0,1]$ に適用すると, 次が成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & \leq & -u_i''(x) + b_{ii}(x)u_i'(x) + a_i \quad for\ x \in [a,b] \\ a_i & \equiv & (\beta^c\kappa)_i + (\gamma\nu)_i + k_i + \delta_i \end{array} \right.$$

よって, $u_i''(x) \leq \beta_{ii}u_i'(x) + a_i \quad (\ x \in (s,t)\ )$
従って, $u_i''(x) \leq \beta_{ii}\overline{\kappa_i} + a_i \equiv K_i \quad (\ x \in (s,t)\ )$

この両辺に $u_i''(x) > 0$ をかけて, 区間 $[s,t]$ 上で積分すると,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_s^t u_i'(x)u_i''(x)dx & \leq & \displaystyle\int_s^t K_i u_i'(x)dx \\ \frac{1}{2}\{(u_i'(t))^2 - (u_i'(s))^2\} & \leq & K_i(u_i(t) - u_i(s)) \leq K_i(\psi + \psi) \leq 2K_i\nu_i \end{array}$$

これを整理すると,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\{\overline{\kappa}_i^2 - \Lambda_i^2\} & \leq & 2\{\beta_{ii}\overline{\kappa}_i + (\beta^c\kappa)_i + (\gamma\nu)_i + k_i + \delta_i\}\nu_i \\ \kappa_i^2 - 4\nu_i(\beta\kappa)_i & \leq & \Lambda_i^2 + 4\nu_i(\gamma\nu + k + \delta)_i \end{array}$$

これは仮定の (2.48) に反して, 矛盾する。
ゆえに, 背理法の仮定より, 求める結論が得られる。□

Lemma 11 $Lemma\ 2.10$ の (2.47) が, $a = 0,\ b = 1$ で成り立つと仮定する。
このとき, 次の 1) と 2) が成り立つ。

1) 任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対して, (2.48) が $\Lambda_i = \psi_i(0) + \psi_i(1)$ で成り立つとき, 次が成り立つ。

$$u \in R,\ |u| \leq \psi,\ \hat{M}u = r \implies |u'| \leq \kappa$$

2) 任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対して, (2.48) が $\Lambda_i = \max\{\ \Lambda_{ij} \mid j = 0, 1, ..., m_i\ \}, \qquad \Lambda_{ij} \equiv (x_{i,j+1} - x_{ij})^{-1}(\psi(x_{ij}) + \psi(x_{ij}))$ で成り立つとき, 次が成り立つ。

$$u \in \mathcal{R},\ |u| \leq \psi,\ \hat{\mathcal{M}}u = \mathcal{P}_r \implies |u'| \leq \kappa$$

[証明] 1) $Lemma\ 2.10$ において, 任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対して,
$a = 0,\ b = 1$ として証明すればよい。□

2) $Lemma\ 2.10$ において, 任意の $i \in \{1, ..., n\},\ j \in \{1, ..., m_i\}$ に対して, $a = x_{ij},\ b = x_{i,j+1}$ として証明すればよい。□

2.3.3 EB algorithm

この節では, 今まで述べてきたことを用いて, 解の存在を検証するのに必要な $EB\ \ algorithm$ を説明する。この $EB\ \ algorithm$ は, $Theorem\ 2.4$ と $Theorem\ 2.5$ の仮定を検証するものであり, これによって解の存在とその包含について検証を行うことができる。簡便のため, 次のような 2 階スカラー値境界値問題を考え, これに対する $EB\ \ algorithm$ を確立して, 説明する。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -U'' + \Upsilon(x, U, U') & = & 0 \quad for\ x \in (0,1) \\ B_0[U] & = & r_0 \\ B_1[U] & = & r_1 \end{array} \right. \tag{2.49}$$

ただし, Uは求めるべき境界値問題 (2.49) の真の解, B_0及び B_1は (2.38) において, $n = 1$ とした境界作用素であり, $\Upsilon \in C_2(\ [0,1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ \mathbf{R}\ )$ である。

境界値問題 (2.49) の近似解 $\omega \in C_2[0,1]$ が,(2.49) の境界条件を満足すれば,(2.49) は次の境界値問題 (2.50) と同値になる。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L[u] + f(x,u,u') & = & d(x) \\ B_0[u] = B_1[u] & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.50}$$

ただし, 各 $L,\ f,\ d$ は次で定義するものとする。

$$\begin{array}{rcl} L[u](x) & \equiv & -u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) \\ f(x,y,p) & \equiv & \Upsilon(x,y,p) - B(x)p - C(x)y \\ B(x) & \equiv & \frac{\partial \Upsilon}{\partial p}(x,\omega,\omega') \\ C(x) & \equiv & \frac{\partial \Upsilon}{\partial y}(x,\omega,\omega') \\ d(x) & \equiv & \omega'' - \Upsilon(x,\omega,\omega') \end{array}$$

ここで, 上記の関数 $f(x,y,p)$ に対して,2.2.1 節の $Assumption\ 2.3$ を仮定する。更に, 関数 $w(x)$ を次で定義する。

$$w(x) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x(1-x) & if\ \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\ 1 & if\ \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\ x & if\ \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1 \\ 1-x & if\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0 \end{array} \right.$$

このとき, 境界値問題 (2.49) に関する $EB\ \ algorithm$ は以下で述べるものであり, これは $Theorem\ 2.5$ と $Lemma\ 2.11$ の $1)$ に基づいている。

($EB\ algorithm$)

(1)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\omega'' + \Upsilon(x,\omega,\omega') & \approx & 0 \\ B_0[\omega] & = & r_0 \\ B_1[\omega] & = & r_1 \end{array} \right.$$

を満たすような近似解 $\omega \in C_2[0,1]$ を求める。

(2)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L[g] & \approx & 0 \\ B_0[g] & = & 0 \\ g(\xi) & = & 0 \\ B_1[g] & = & 0 \end{array} \right.$$

を満たすような関数 $g \in C_{0,2}[0,\xi,1]$ を求める。

(3)

$$\sigma \equiv g'(\xi+0) - g'(\xi-0)$$

で定義された定数 σに対して, $\sigma \neq 0$ を確かめる。

(4)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |B| & \leq & \beta \\ |C| & \leq & \gamma \\ |d| & \leq & \delta \\ |g| & \leq & \rho \\ |L[g]| & \leq & \Delta \end{array} \right.$$

を満たすような正定数 $\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \rho,\ \Delta$を求める。

(5)

$$\left\{\begin{array}{rcl} L[\psi_0] &=& 1 \\ B_0[\psi_0] &=& 0 \\ \psi_0(\xi) &\equiv& p_0 \equiv |\sigma|^{-1}\rho e^{\beta \max\{\xi, 1-\xi\}} \\ B_1[\psi_0] &=& 0 \end{array}\right.$$

を満たすような関数 $\psi_0 \in C_{0,2}[0, \xi, 1]$ を求める。

(6)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \omega^{-1}\psi_0 &\geq& \varepsilon_1 \\ |\psi_0| &\leq& \nu_0 \\ |\psi_0'| &\leq& \mu_0 \\ |L[\psi_0] - 1| &\leq& \delta_0 \end{array}\right.$$

を満たすような定数 ε_1 及び正定数 $\nu_0,\ \mu_0,\ \delta_0$ を求める。

(7) $\varepsilon_1 \geq 0$ を確かめる。

(8)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_0 &\equiv& \frac{1}{2}\{\psi_0(0) + \psi_1(1)\} \\ \Delta_0 &\equiv& \Delta\rho^{-1}\nu_0 \\ \chi_0 &\equiv& \nu_0\beta + [\lambda_0^2 + \nu_0^2(\beta^2 + \gamma^2) + \nu_0(1 - \Delta_0)]^{\frac{1}{2}} \\ \kappa_0 &\equiv& \max\{\mu_0, 2\chi_0\} \end{array}\right.$$

と定義された定数 $\lambda_0,\ \Delta_0,\ \chi_0,\ \kappa_0$を計算する。

(9) $majorizing\ function\ G$ とある正定数 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\left\{\begin{array}{rcl} G((1+\varepsilon)\nu_0\delta, (1+\varepsilon)\mu_0\delta) + (1+\varepsilon)\delta_0\delta &\leq& \varepsilon\delta \\ G((1+\varepsilon)\nu_0\delta, (1+\varepsilon)\kappa_0\delta) + (1+\varepsilon)\delta_0\delta &\leq& \varepsilon\delta \end{array}\right.$$

を確かめる。

この $EB\ algorithm$ が実行されると, $Theorem\ 2.5$ が適用できる。
ゆえに, 境界値問題 (2.49) は次のような解 $U^* \in C_2[0, 1]$ をもつことがわかる。

$$\left\{\begin{array}{rcl} |U^* - \omega| &\leq& \psi \equiv (1+\varepsilon)\delta\psi_0 \\ |(U^* - \omega)'| &\leq& \kappa \equiv (1+\varepsilon)\delta\kappa_0 \end{array}\right.$$

こうして, 境界値問題 (2.49) の解の存在とその包含について検証することができる。

2.3.4 数値的検証例

2.4 McCarthy の方法

文献 [10] に従い, McCarthy の方法を以下で解説する。

次のような境界値問題を考える。

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''(t) + f(t, y, y') &=& 0 \\ y(a) &=& \beta_1 \\ y(b) &=& \beta_2 \end{array}\right. \tag{2.51}$$

目的は, 境界値問題 (2.52) の解の存在とその誤差限界を得ることである。ここでは, $Kantorovich$ の定理を用いて, このことについて検証をする。

最初に, その準備として,(2.52) の定式化を行う。

2.4.1 境界値問題の定式化

最初に, 空間 Xとそのノルム $\|\cdot\|$ を次で定義する。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X & \equiv & C[a,b] \\ \|x\| & \equiv & \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| \end{array} \right.$$

次に, 作用素 $Q : X \longrightarrow X$を次で定義する。

$$Q(x)(t) \equiv x(t) + \int_a^t \overline{f}(x)(s)ds \tag{2.52}$$

ただし, 関数 $\overline{f}(x)(s)$ は, 次で定義するものとする。

$$\overline{f}(x)(s) \equiv f(s, \beta_1 + \int_a^t x, x(s))$$

(以後, 断りのない限り, 積分変数を省くことにする。)
ここで, Π_0を区間 $[a,b]$ 上の定数関数全体の集合とする。
このとき, 境界値問題 (2.52) の解 $y^*(t)$ を求めることと, 次の (2.54) は同値となる。

$$Find\ \ x^* \in X\ \ such\ \ that\ \left\{ \begin{array}{rcl} Q(x^*) & \in & \Pi_0 \\ \int_a^b x^* & = & \beta_1 - \beta_2 \end{array} \right. \tag{2.53}$$

ここで, $y^*(t)$ と x^*の関係は次のようになっている。

$$y^*(t) = \beta_1 + \int_a^t x^*$$

(2.53) より, 作用素 Q の点 x における η 方向の $Fréchet$ 微分 $Q'(x)(\eta)$ は次で与えられる。

$$Q'(x)\eta = \eta + \int_a^t [\overline{f}_2(x) \int_a^s \eta] + \int_a^t \overline{f}_3(x)\eta \tag{2.54}$$

ただし, 添字の数字は, 第 i 成分 ($i = 2, 3$) による偏導関数を表すものとする。
ここで, 以上のことに関して, 次の $Lemma\ 2.12$ が成り立つ。

Lemma 12 任意の点 $x \in X$に対して, $Q'(x)$ が (2.55) で与えられると仮定する。
このとき, $Q'(x)^{-1}$が存在して, $L \geq \|\overline{f}_3(x)\| + (b-a)\|\overline{f}_2(x)\|$ を満たす任意の定数 L に対して, 次の不等式が成り立つ。

$$\|Q'(x)^{-1}\| \leq e^{L(b-a)}$$

[証明] [23] の $Lemma\ 4.1$ を参照。□

更に, 次の $Theorem\ 2.6$ が成り立つ。

Theorem 11 $x_0 \in X$と仮定して, $\Gamma_0 \equiv Q'(x)^{-1}$と定める。更に, 作用素 $P : X \longrightarrow X$を次で定義する。

$$P(x) \equiv Q(x) - \frac{(\beta_1 - \beta_2) + \int_a^b (\Gamma_0 Q(x) - x)}{\int_a^b \Gamma_0(1)} \tag{2.55}$$

このとき, 次の $(1) \sim (3)$ が成り立つ。
(1) $P(x) = 0$ が成り立つ。 $\Longleftrightarrow$ x は,(2.54) の解である。

(2) $P'(x_0)^{-1}$が存在して, $P'(x_0)^{-1} = \Gamma_0$が成り立つ。
(3) $\int_a^b (x_0 - \Gamma_0 P(x_0)) = \beta_2 - \beta_1$が成り立つ。
[証明] [24] の 7 章を参照。□

$y_0 \in C^1[a,b]$ を境界値問題 (2.52) の近似解として, $x_0 \equiv y_0'$と定めることにする。
　このとき, 方程式 $P(x) = 0$ に $Newton$ 法を適用すると,(2.54) より, 次の (2.57) が導かれる。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_0 - \Gamma_0 P(x_0) \\ y_1 & = & \beta_1 + \int_a^t x_1 \\ y_1(a) & = & \beta_1 \\ y_1(b) & = & \beta_2 \end{array} \right. \tag{2.56}$$

このとき, 次の $Theorem\ \ 2.7$ が成り立つ。

Theorem 12 $Theorem$ 2.6 の仮定と (2.57) を仮定し, 次を定義する。

$$\Omega_0 \equiv \{\ x \in X \mid \|x - x_0\| \leq 2\eta\ \}$$

更に, 次のことを仮定する。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \|\overline{f}_3(x_0)\| + (b-a)\|\overline{f}_2(x_0)\| & \leq & L & \\ \sup_{x \in \Omega_0} \|\overline{f}_{ij}(x)\| & \leq & c_{ij} & (i,j = 2,3) \\ e^{L(b-a)} & \leq & B & \\ (b-a)(c_{22} + 2c_{23} + c_{33})(1 + \frac{B}{|\int_a^b \Gamma_0(1)|}) & \leq & K & \\ \|x_1 - x_0\| & \leq & \eta & \\ H \equiv BK\eta & \leq & \frac{1}{2} & \end{array} \right.$$

このとき,(2.54) の解 $x^* \in X$が存在する。即ち, 境界値問題 (2.52) の解

$$y^* = \beta_1 + \int_a^t x^*$$

が存在する。更に, 次のことが成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_* & \leq & \|(y^*)' - x_0\| \leq r^* \\ \|y^* - x_0\| & \leq & (b-a)r^* \\ r^* & = & \frac{(1-\sqrt{1-2H})\eta}{H} \\ r_* & = & \frac{2\|x_1 - x_0\|}{1+\sqrt{1+2H}} \\ y_0 & = & \beta_1 + \int_a^t x_0 \end{array} \right.$$

[証明] 前記の $Lemma\ 2.12$ と仮定より, 任意の $x \in \Omega_0$に対して,

$$\begin{array}{rcl} \|P'(x)^{-1}\| = \|\Gamma_0\| & \leq & e^{L(b-a)} \\ & \leq & B \end{array}$$

従って,

$$\|P''(x)\| \leq K \quad for\ \forall\ x \in \Omega_0$$

を計算して確かめれば, $Kantorovich$ の定理によって, r_*に関する評価を除いて, 求める結論が得られる。
r_*に関する評価に関しては,[4] を参照。□

Remark 3 (1) $Theorem\ 2.7$ の y_0は境界値問題 (2.52) の近似を与えるので, $x_0 = y_0'$より, x_0 は $(y^*)'$ の近似を与えることになる。
もし $\overline{y}_0 \in C^1$ が (2.52) の解で, $\overline{y}_0$の評価が得られるとき, 次の式から評価できる (以後, 断りのない限り, 関数空間は区間 $[a,b]$ 上で考えるものとして, $[a,b]$ を省くことにする。) 。

$$\|y^* - \overline{y}_0\| \leq \|y^* - y_0\| + |\beta_1 - \overline{y}_0(a)|$$

ただし,

$$\begin{aligned} y_0 &= \beta_1 + \int_a^t x_0 \\ x_0 &= \overline{y}_0' \end{aligned}$$

特に, $\overline{y}_0(a) = \beta_1$ならば, $y_0 = \overline{y}_0$である。
(2) $H = BK\eta \leq \frac{1}{2}$ が成立しない場合は, 境界値問題 (2.52) の近似解 x_0の精度を上げる必要がある。その理由は, $Kantorovich$ の定理が適用できないからである。

2.4.2 Kantorovich の定理の定数の計算方法

この $2.4.2$ 節では, $Kantorovich$ の定理の仮定で用いる定数の計算方法について説明する。ここでは, 定数 Bは不等式 $e^{L(b-a)} \leq B$によって評価されているので, 定数 ηと Kの計算方法について説明する。

(1) 定数 η の計算方法
まず, 未知関数 ϕに対して, $\eta = \Gamma_0(\phi)$ を考える。
$\Gamma_0 = Q'(x_0)^{-1}$より,

$$Q'(x_0)(\eta) = \phi \tag{2.57}$$

(2.55) より,

$$Q'(x_0)(\eta) = \eta + \int_a^t K(s,t)\eta(t)dt$$

ただし, $K(s,t) \equiv \overline{f}_3(x_0)(t) + \int_a^t \overline{f}_2(x_0)$ である。
ここで,(2.58) は次の $Volterra$ 型積分方程式に同値変形できる。

$$\eta(s) + \int_a^t K(s,t)\eta(t)dt = \phi(s)$$

これを改めて, 次の $Volterra$ 型積分方程式を考える。

$$u(t) + \int_a^t K(s,t)u(t)dt = w(s) \tag{2.58}$$

$w,\ K \in C^1$のとき,(2.59) の両辺を s で微分すると,

$$u'(s) + K(s,s)u(s) + \int_a^s K_s(s,t)u(t)dt = w'(s)$$

ここで,

$$\begin{aligned} s_i &= a + (i-1)h \quad (i = 1, ..., N+1) \\ h &= \tfrac{b-a}{N} \end{aligned}$$

と s を分割して,

$$\begin{cases} \tilde{u}_i & : & u(s_i) \text{ の近似} \\ \tilde{u}'_i & : & u(s_i)' \text{の近似} \end{cases}$$

とし, $u(s)$ を $Hermite$ 3 次多項式で, 点 s_iにおいて次のように近似する。

$$\tilde{u}(s) = a_i(s)\tilde{u}_i + hb_i(s)\tilde{u}'_i + c_i(s)\tilde{u}_{i+1} + hd_i(s)\tilde{u}'_{i+1} \quad (s_i \leq s \leq s_{i+1})$$

ここで, $a_i(s),\ b_i(s),\ c_i(s),\ d_i(s)$ は次の通りである。

$$\begin{cases} a_i(s) &=& 1 - 3x_i^2 + 2x_i^3 \\ b_i(s) &=& x_i - 2x_i^2 \\ c_i(s) &=& 3x_i^2 - 2x_i^3 \\ d_i(s) &=& -x_i^2 + x_i^3 \end{cases}$$

ただし,

$$x_i(s) \equiv \frac{s - s_i}{h}$$

このとき, $\tilde{u}(s)$ は各区間 $[s_i, s_{i+1}]$ 上で, $(s_i, \tilde{u}_i)$ と $(s_{i+1}, \tilde{u}_{i+1})$ を補間する 3 次多項式である。
しかも, $\tilde{u}(s), \tilde{u}'(s)$ は点 $s_i\ \ (i = 1, ..., N+1)$ 上で連続である。
定義から, $\tilde{u}_i,\ \tilde{u}'_i$は $N+1$ 個の点 s_iで,(2.59) を満たすので, 次の方程式の解である。

$$\begin{cases} \tilde{u}_k &=& -\int_a^s K(s_k, t)\tilde{u}(t)dt + w(s_k) \\ \tilde{u}'_k &=& -K(s_k, s_k)\tilde{u}_k - \int_a^s K_s(s_k, t)\tilde{u}(t)dt + w'(s_k) \end{cases}$$

ここで, 区間 $[s_i, s_{i+1}]$ を M個に分割すると, 細部の各点 t_jは, 次のように表現できる。

$$\begin{array}{rcl} t_j &=& a + (j-1)\frac{h}{M} \quad (j = 1, ..., NM+1) \\ I &=& (i-1)M + 1 \end{array}$$

このとき, $Simpson$ の求積公式を用いると, その求積誤差 Q_iは次のように評価できる。

Lemma 13 $f \in C^5$であると仮定する。このとき, 次の評価が成り立つ。

$$|Q_i| \leq \tilde{Q} \quad (i = 1, ..., N+1)$$

ただし,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{Q} &\equiv& \frac{Nh}{180}(\frac{h}{M})^4\{\ \|f^{(4)}\| + \|[K\tilde{u}]^{(4)}\| + \|\tilde{u}\|[Nh\|f_2^{(4)}\| + \frac{15}{2}\|f_3^{(3)}\|]\ \} \\ [K\tilde{u}]^{(4)} &\equiv& \frac{\partial^4}{\partial t^4}[K(s,t)\tilde{u}(t)] \end{array}$$

[証明] [10] の $Lemma\ 4.1$ を参照。□

ここで, $\varepsilon(s)$ を,

$$\varepsilon(s) \equiv \tilde{u}(s) - u(s)$$

と定義する。このとき, 次の $Lemma\ \ 2.14$ が成り立つ。

Lemma 14 $f \in C^5$であると仮定する。更に, 次を仮定する。

$$\begin{cases} \|\overline{f}_2(x_0)\| + (b-a)\|\overline{f}_3(x_0)\| &\leq& L_1 \\ \|\overline{f}_2(x_0)\| &\leq& L_2 \\ L &\equiv& 2L_1 + hL_2 \\ L^* &\equiv& L_1 + hL_2 \end{cases}$$

このとき, $Lh < 1$ が成り立つならば, 次の評価が成り立つ。

$$\|\varepsilon\| \leq \{ \frac{2}{1-Lh}[\frac{L^*Nh^5}{384}\|u^{(4)}\| + \tilde{Q}] \cdot \exp[\frac{2L^*Nh}{1-Lh}] + \frac{h^4}{384}\|u^{(4)}\| \}$$

[証明] [10] の $Lemma\ 4.2$ を参照。□

更に, 次の $Lemma\ \ 2.15$ が成り立つ。

Lemma 15 $f \in C^5$であると仮定する。このとき, 次の評価が成り立つ。

$$\|u^{(4)}\| \leq \sum_{k=1}^{4} \|\delta_k\| \cdot \|w^{(k)}\| + B[\|\gamma_1\| + (b-a)\|\gamma_2\|] \cdot \|w\|$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -[3(f_3^{(2)} + f_2^{(1)}) - f_3(5f_3^{(1)} - 2f_2 - f_3^2)] \\
\delta_2 &= -(3f_3^{(1)} + f_2 - f_3^2) \\
\delta_3 &= -f_3 \\
\delta_4 &= 1 \\
\gamma_1 &= -\{f_3^{(3)} + 3f_2^{(2)} - (f_3^{(1)} + f_2)(3f_3^{(1)} + f_2) \\
&\quad + f_3[f_3(6f_3^{(1)} + 3f_2 - f_3^2) - 4f_3^{(2)} - 5f_2^{(1)}]\} \\
\gamma_2 &= -\{f_2^{(3)} - 3f_3^{(1)}f_2^{(1)} + f_2f_3(5f_3^{(1)} + 2f_2 - f_3^2) \\
&\quad - f_2(3f_3^{(2)} + 4f_2^{(1)}) - f_3(f_2^{(2)} - f_3f_2^{(1)})\}
\end{aligned}$$

[証明] [10] の $Lemma\ 5.1$ を参照。□

ここで, $w = Q(x_0)$ のときの (2.59) の解を u, $w = 1$ のときの (2.59) の解を u で表し, u と v の $Hermite$ 近似をそれぞれ $\tilde{u}$と $\tilde{v}$で表すものとする。更に, その差 $\tilde{u} - u$, $\tilde{v} - v$を, それぞれ εと δで表すものとする。このとき, 次の $Lemma\ 2.16$ が成り立つ。

Lemma 16 L を $Lemma\ 2.14$ と同様に定義すると仮定する。更に, $f \in C^5$であると仮定し, $h > 0$ が次を満たすようにとれると仮定する。

$$\begin{cases} Lh &< 1 \\ \|\delta\| &< \frac{1}{(b-a)}|\int_a^b \tilde{v}| \end{cases}$$

このとき,

$$\eta \geq \|\tilde{x} - x_0\| + \overline{\eta}$$

を満たすような全ての点 ηに対して,

$$\|x_1 - x_0\| \leq \eta$$

が成り立つ。ただし, $\overline{\eta}$は, 次の不等式を満たすような定数である。

$$\overline{\eta} \geq [\|\varepsilon\| + \frac{|\int_a^b (\tilde{u} - x_0)|\|\delta\|}{|\int_a^b \tilde{v}|}][1 + \frac{(b-a)\|\tilde{v}\| + \|\delta\|}{|\int_a^b \tilde{v}| - (b-a)\|\delta\|}]$$

[証明] [10] の $Lemma\ 5.2$ を参照。□

以上の $Lemma\ \ 2.14, Lemma\ 2.15, Lemma\ 2.16$ によって, 定数 ηを評価することができる。

(2) 定数 Kの計算方法

関数 $f(t,y,y')$ が変数 yと y'に関して多項式である場合,

$$\sup_{x\in\Omega_0}\|\overline{f}_{ij}(x)\| \le c_{ij} \quad (i,j=2,3)$$

という評価が得られる。このとき,特に, i と jが固定された整数であるとき,非負整数 $N,\ l_k,\ m_k$ と関数 $\alpha\in C[a,b]$ に対して, 次のように表現できる。

$$\overline{f}_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k(t)(\beta_1+\int_a^t x)^{l_k}(x(t))^{m_k}$$

ここで, $x\in\Omega_0$に対して, 次の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned}\|\beta_1+\int_a^t x\| = \|y_0(t)+\int_a^t(x-x_0)\| &\le \|y_0\|+(b-a)2\eta\\ \|x\|\le\|x_0\|+\|x-x_0\| &\le \|x_0\|+2\eta\end{aligned}$$

従って, 定数 c_{ij}を

$$\sum_{k=1}^{N}\|\alpha_k\|(\|y_0\|+(b-a)2\eta)^{l_k}(\|x_0\|+2\eta)^{m_k}\le c_{ij}$$

となるようにとれば, 定数 Kを次のように評価することができる。

$$K\ge(b-a)(c_{22}+2c_{23}+c_{33})[1+\frac{B}{|\int_a^b\tilde{v}|-(b-a)\|\delta\|}]$$

このようにして, 定数 Kを計算することができる。

以上から, $Kantorovich$ の定理の仮定で用いる定数を数値的に構成できる。
従って, $Kantorovich$ の定理によって, 境界値問題 (2.51) の解の存在とその誤差限界を検証することができる。

2.4.3 数値的検証例

2.5 Kedem の方法

文献 [7] に従い, Kedem の方法を以下で解説する。

次のような境界値問題を考える。

$$\left\{\begin{array}{rcll} u' &=& f(t,u(t)) & t\in(a,b)\\ B_1u(a)+B_2u(b) &=& w & \end{array}\right. \tag{2.59}$$

ここで, 各 $f,\ B_1,\ B_2,\ w$は次の通りである。

$$\begin{aligned} f &\in C^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)\\ B_\sigma &\in M_n(\mathbf{R}) \quad (\sigma=0,1)\\ w &\in \mathbf{R}^n\end{aligned}$$

目的は, この境界値問題 (2.61) の存在を検証することである。これを検証するのに,2.4 節と同様に, ここでも $Kantorovich$ の定理を利用する。この定理によって,(2.61) の解の存在を検証することができる。検証の手順は,(2.61) の近似解 x_0を求めて, $Kantorovich$ の定理の仮定を満たすような諸定数を数値的に構成することである。このとき, 境界値問題 (2.61) の解 x^* の存在と, その誤差限界 $\|x^* - x_0\| \leq r_0$を得ることができる。

最初に, 境界値問題 (2.61) を $Kantorovich$ の定理が適用できるように定式化を行う。

2.5.1 境界値問題の定式化

最初に, 関数空間 Xと Yを次で定義する。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & \equiv & C([a,b],\mathbf{R}) \\ Y & \equiv & C_0([a,b],\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \equiv \{\ x \mid x \in X,\ x(a) = 0\ \} \times \mathbf{R}^n \end{array} \right.$$

この Xと Yに区間 $[a,b]$ 上の L^∞ ノルム $\|\cdot\|_{L^\infty(a,b)}$を導入する (ただし, 以後, 断わりのない限り, $\|\cdot\|_{L^\infty(a,b)}$を $\|\cdot\|_\infty$と略記することにする。) 。
このとき, 空間 $(X, \|\cdot\|_\infty)$ 及び $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ は $Banach$ 空間をなすことがわかる。
また, 行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ とベクトル $r \in \mathbf{R}^n$に対して, 簡便のため, 次の略記法を使うことにする。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |A| & \equiv & \|A\|_\infty \\ |r| & \equiv & \|r\|_\infty \end{array} \right.$$

次に,(2.61) の関数 fに対して, 作用素 $F : X \longrightarrow Y$を次で定義する。

$$F(u(t)) \equiv \left\{ \begin{array}{l} u(t) - u(a) - \displaystyle\int_a^t f(s,u(s))ds \qquad for\ t \in [a,b] \\ B_1 u(a) + B_2 u(b) - w \end{array} \right. \tag{2.60}$$

このとき, 方程式 $F(u(t)) = 0$ は,(2.61) と同値であることがわかる。

また, 作用素 Fの点 x_0における $Fréchet$ 微分 $F'(x_0)$ 及び $F''(x_0)$ は, それぞれ次の (2.63) と (2.64) で与えられる。

$$\begin{array}{rcl} F'(x_0)([v](t)) & = & \left\{ \begin{array}{l} v(t) - v(a) - \displaystyle\int_a^t f_x(s,x_0(s))v(s)ds \\ B_1 v(a) + B_2 v(b) \end{array} \right. \\ f_x(s,x) & = & \{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\}_{i,j=1}^n \end{array} \tag{2.61}$$

$$\begin{array}{rcl} F''(x_0)([v,w](t)) & = & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^t (f_{xx}(s,x_0(s))v(s))w(s)ds \\ 0 \end{array} \right. \\ f_{xx}(t,x) & = & \{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\}_{i,j,k=1}^n \end{array} \tag{2.62}$$

以上から, $\eta \equiv \begin{pmatrix} r(t) \\ \rho \end{pmatrix}$ であれば, $v \equiv [F'(x_0)]^{-1}\eta$ が, 次の (2.65) の解となる。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v(t) - v(a) - \displaystyle\int_a^t f_x(s,x_0(s))v(s)ds & = & r(t) \\ B_1 v(a) + B_2 v(b) & = & \rho \end{array} \right. \tag{2.63}$$

ここで, 上記のことに関して, 次の $Lemma\ 2.17$ が成り立つ。

Lemma 17 $A(t)$ を区間 $[a,b]$ 上の連続な $n\times n$ 行列値関数, $Y(t)$ を次の初期値問題の $n\times n$ 基本解行列と仮定する。

$$\begin{cases} Y'(t) &= A(t)Y(t) & for\ t\in[a,b] \\ Y(a) &= I & (I\in M_n(\mathbf{R})\ \text{は単位行列}) \end{cases}$$

更に, $r(t)$ を $r(a)=0$ であるような連続なベクトル値関数と仮定して, 次を定義する。

$$w(x)\equiv Y(t)\int_a^t Y^{-1}(s)A(s)r(s)ds+r(t)$$

このとき, 次の等式が成り立つ。

$$w(t)-\int_a^t A(s)w(s)ds=r(t)$$

[証明] [2] より, 行列 $Y(t)$ は正則行列である。
従って, $Y^{-1}(t)$ を用いている関数 $w(t)$ は $well\text{-}defined$ である。
このとき,

$$\begin{aligned} & w(t)-\int_a^t A(s)w(s)ds \\ = \ & \{Y(t)\int_a^t Y^{-1}(s)A(s)r(s)ds+r(t)\} \\ & -\{\int_a^t A(s)Y(s)\int_a^s Y^{-1}(u)A(u)r(u)duds-\int_a^t A(s)r(s)ds\} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \int_a^t A(s)Y(s)\int_a^s Y^{-1}(u)A(u)r(u)duds \\ = \ & \int_a^t Y'(s)\int_a^s Y^{-1}(u)A(u)r(u)duds \\ \equiv \ & \int_a^t Y'(s)Q(s)ds \\ = \ & [Y(s)Q(s)]_a^t-\int_a^t Y(s)Q'(s)ds \\ = \ & Y(t)\int_a^t Y^{-1}(t)A(t)r(t)dt-\int_a^t A(s)r(s)ds \end{aligned}$$

ゆえに, $w(t)-\int_a^t A(s)w(s)ds=r(t)$ □

更に, 次の $Theorem\ 2.8$ が成り立つ。

Theorem 13 次のような 2 点境界値問題を考える。ただし, $r(a)=0$ とする。

$$\begin{cases} v(t) &= v(a)+\int_a^t A(s)v(s)ds+r(t) \\ B_1v(a)+B_2v(b) &= \rho \end{cases} \tag{2.64}$$

(2.66) の基本解行列を $Y(t)$ として, $R\equiv B_1+B_2Y(b)$ と定める。

このとき, 行列 R が正則行列であるときに限り, 境界値問題 (2.66) は一意の解をもち, その解 $V(t)$ は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} V(t) &= Y(t)[\,R^{-1}B_1\int_a^t Y^{-1}(s)A(s)r(s)ds \\ & \quad +(R^{-1}B_1-I)\int_a^b Y^{-1}(s)A(s)r(s)ds-R^{-1}(B_2r(b)-\rho)\,]+r(t) \end{aligned} \tag{2.65}$$

[証明] あるベクトル $\alpha \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$v(t) \equiv Y(t)\int_a^t Y^{-1}(s)A(s)r(s)ds + r(t) + Y(t)\alpha \quad (1)$$

と定義すると, $v(a) = r(a) + Y(a)\alpha = \alpha$
$Lemma\ 2.17$ より,

$$v(t) - \int_a^t A(s)v(s)ds = r(t) + v(a)$$

ここで, 計算することによって, 次が成り立つ。

$R\alpha = \rho - B_2Y(b)\int_a^b Y^{-1}(s)A(s)r(s)ds + B_2r(b)$ が成り立つ。
$\iff$ $v(t)$ は (2.66) の解である。

よって, 行列 Rが正則行列であるとき, $v(t)$ は (2.66) の解であり,

$$\alpha = R^{-1}\rho - R^{-1}B_2Y(b)\int_a^b Y^{-1}(s)A(s)r(s)ds + R^{-1}B_2r(b) \quad (2)$$

であるから,(2) を (1) に代入して整理すると,(2.67) が得られる。□

$Theorem\ 2.8$ より, 次の $Lemma\ 2.18$ が成り立つ。

Lemma 18 作用素 $F : X \longrightarrow Y$を (2.62) で定義し, $Y(t)$ を次の方程式の基本解行列とする。

$$y' = f_x(t, x_0(t))y(t)$$

このとき, 次の評価式が成り立つ (以後, 断りのない限り, $\|\cdot\|_\infty$を $\|\cdot\|$ と略記することにする。) 。

$$\|F'(x_0)^{-1}\| \le \|Y\|\ [\int_a^b |Y^{-1}(s)|ds\ \cdot\ \max(|R^{-1}B_1|, |R^{-1}B_1 - I|) + |R^{-1}B_2| + |R^{-1}|\ ] + 1$$

[証明] $Y^{-1}(t)' = -Y^{-1}(t)f_x(t, x_0(t))$ を用いると, $Theorem\ 2.8$ から導かれる。□

2.5.2 Kantorovich の定理の定数の計算方法

この節では, $Kantorovich$ の定理の仮定で用いる正定数 $\kappa,\ B,\ \eta$の計算方法を説明する。

(1) 定数 κの計算方法
最初に, 区間 $[a, b]$ を次のように n 個に分割する。

$$a \equiv x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} \equiv b$$

ここで, 境界値問題 (2.61) の近似解 x_0を, 次のような区分多項式にとる。

1) 区間 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ 上のとき
x_0を, 解と点 $x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}$での導関数の値を補間する区分的 6 次多項式にとる。
2) 区間 $[x_n, x_{n+1}]$ 上のとき
x_0を, 解と点 $x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1}$での導関数の値を補間する区分的 6 次多項式にとる。

そこで, 境界値問題 (2.61) の関数 $f(t, u)$ が各変数 t と u の多項式でかけている場合, x_0も区分多項式にとることができる。

このとき, 関数 $f(t,x)$ の導関数 $f_{xx}(t,x)$ と $f_{xxx}(t,x)$ はともに t 及び x の多項式でかけているので, 定数 κは, 点 $x-x_0=r$における $Taylor$の定理を用いて, 次のように評価することができる。

$$\begin{aligned}\kappa &= \sup_{\|x-x_0\|\le r} \|f_{xx}(t,x(t))\| \\ &\le \|f_{xx}(t,x_0(t))\| + r\|f_{xxx}(t,x(t))\|\end{aligned}$$

こうして, 定数 κを計算することができる。

(2) 定数 Bの計算方法

定数 Bは, $Lemma\ 2.18$ によって計算することができる。しかしながら, $\|Y\|,\ \|Y^{-1}\|,\ |R^{-1}|$ 等を評価する方法を見いださねばならない。

最初に, $\|Y\|$ と $\|Y^{-1}\|$ の評価方法について説明する。

次を仮定する。

$$\begin{cases} V(t) & : & Y(t) \text{ の近似行列値関数} \\ W(t) & : & Y(t)^{-1} \text{の近似行列値関数} \end{cases}$$

このとき, $V(a)-W(a)=I$が成り立つものとする。
次に,

$$\begin{cases} E_1(t) & \equiv & Y(t)-V(t) \\ E_2(t) & \equiv & Y^{-1}(t)-W(t) \end{cases}$$

と定義すると, 計算することによって, 次が成り立つ。

$$\begin{cases} E_1(t) & = & \int_a^t A(s)E_1(s)ds + X_1(t) \\ X_1(t) & \equiv & I - V(t) - \int_a^t A(s)V(s)ds \end{cases} \tag{2.66}$$

同様にして,

$$\begin{cases} E_2(t) & = & \int_a^t E_2(s)A(s)ds + X_2(t) \\ X_2(t) & \equiv & I - W(t) - \int_a^t W(s)A(s)ds \end{cases} \tag{2.67}$$

(2.68) と (2.69) より, 次の評価が得られる。

$$|E_i(t)| \le |X_i(t)| + \int_a^t |A(s)||E_i(s)|ds \qquad (i=1,2) \tag{2.68}$$

[2] の $Gronwall$の不等式 $(Proposition\ 1.3)$ を適用すると, $|E_i(t)|$ を次のように評価することができる。

$$\begin{aligned}|E_i(t)| &\le \|X_i\| \exp(\int_a^t |A(s)|ds) \\ &\le \|X_i\| e^{\|A\|t}\end{aligned}$$

この評価は, 例えば, $\|A\|=20$ くらいでも, $e^{20}\ge 10^8$であるから, 本質的な評価ではなくなる可能性がある。しかし, 次のように区間の幅 $h>0$ を小さくすることによって, これを克服することができる。

点 $t\in[u,u+h]$ に対して, 次のように評価することができる。

$$\begin{aligned}|E_i(t)| &\le |E_i(u)| + |X_i(t)-X_i(u)| + \int_u^t |A(s)||E_i(s)|ds \\ \|E_i(\cdot)\| &\le (|E_i(u)| + \|X_i(\cdot)-X_i(u)\|)e^{h\|A\|}\end{aligned} \tag{2.69}$$

このとき, $h > 0$ が十分小さければ, $e^{h\|A\|}$もそれほど大きくはならない。
今, $|E_i(t)|$ は (2.70) を満たしているので, $Lemma\ 2.17$ より,

$$\begin{aligned} E_1(t) &= Y(t)\int_a^t Y^{-1}(s)A(s)X_1(s)ds + X_1(t) \\ &= (V(t)+E_1(t))\int_a^t (W(s)+E_2(s))A(s)X_1(s)ds + X_1(t) \end{aligned}$$

よって,

$$|E_1(t)| \le (|V(t)|+|E_1(t)|)\int_a^t (|W(s)|+|E_2(s)|)|A(s)||X_1(s)|ds + |X_1(t)|$$

従って,

$$\|E_1\|_i \le (\|V\|_i + \|E_1\|_i)\sum_{j=1}^{i} h_j(\|W\|_j + \|E_2\|_j)\|A\|_j\|X_1\|_j + \|X_1\|_i \qquad (2.70)$$

ただし, $\|\cdot\|_i$は i 番目の部分区間のノルムを表すものとする。
同様にして,

$$\|E_2\|_i \le (\|W\|_i + \|E_2\|_i)\sum_{j=1}^{i} h_j(\|V\|_j + \|E_1\|_j)\|A\|_j\|X_2\|_j + \|X_2\|_i \qquad (2.71)$$

このようにして, $\|E_1\|$ と $\|E_2\|$ を評価することができる。
よって, $E_1(t)$ と $E_2(t)$ の定義から, $\|Y\|$ と $\|Y^{-1}\|$ の評価が得られる。

次に, $|R^{-1}|$ の評価方法について説明する。

まず, 上記の $E_1(t)$ と $E_2(t)$ の評価から,

$$|V(b) - Y(b)| \le \delta_1$$

を満たす定数 $\delta_1 > 0$ を求めることができる。
また, 行列 Dを $D \equiv B_1 + B_2V(b)$ と定義するとき, 次の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned} |R-D| &= |B_2||V(b)-y(b)| \\ &\le |B_2|\delta_1 \\ &\equiv \delta_2 \end{aligned}$$

ここで, $|D^{-1}|\delta_2 < 1$ であるとき, 逆行列 R^{-1}が存在して, 次の二通りの評価が成り立つ。

1) $|R^{-1}| \le \frac{|D^{-1}|}{1-|D^{-1}|\delta_2}$
2) $|R^{-1} - D^{-1}| \le \frac{|D^{-1}|^2\delta_2}{1-|D^{-1}|\delta_2}$

行列 D^{-1}は正確には評価できないものの, 次のように評価することができる。

$$\exists\, C \in M_n(\mathbf{R})\ \ such\ \ that\ \ |I - CD| \equiv \delta_3 < 1,\ |D^{-1} - C| \le |D^{-1}|$$
$$\Longrightarrow\ \ |D^{-1}| \le \frac{|C|}{1-\delta_3}$$

以上から, $Lemma\ 2.18$ で使われている, $\|Y\|,\ \|Y^{-1}\|,\ |R^{-1}B_1|,$
$|R^{-1}B_1 - I|,\ |R^{-1}B_2|,\ |R^{-1}|$ が評価できるので, $\|F'(x_0)^{-1}\|$ の評価をすることができる。即ち, 定数 Bを計算することができる。

(3) 定数 ηの計算方法

$Newton$ 法の $algorithm$ から,

$$x_1 = x_0 - [F'(x_0)]^{-1}F(x_0)$$

ゆえに, $\|x_1 - x_0\| = \|F(x_0)^{-1}\|\|F(x_0)\|$
今, $\|F(x_0)^{-1}\|$ は,(2) によって計算されているので, $\|F(x_0)\|$ を計算して評価すれば, $\|x_1 - x_0\|$ を評価することができる。即ち, 定数 ηを計算することができる。

以上によって, $Kantorovich$ の定理の仮定 $(a) \sim (f)$ を満たすような定数を数値的に計算することができる。
従って, $Kantorovich$ の定理より, 多項式の 2 点境界値問題の解の存在とその誤差限界が得られる。

2.6 Urabe の方法

2.6.1 問題の定式化とその展開

文献 [25] に従い, Urabe の方法を以下で解説する。

ここでは, 次のような非線形微分方程式系の周期解の存在を検証する方法について述べる。

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t) \qquad t \in \mathbf{R}$$

ただし, $X(x,t)$ は t に関して 2π周期で, $(x,t) \in D \times \mathbf{R}$ に関して連続微分可能であり, $D \subset \mathbf{R}^n$ は n 次元 $Euclid$ 空間 $\mathbf{R}^n$の領域である。

最初に, 準備として次を定義する。

2π周期関数 $f(t)$ に対して, $Euclid$ ノルムを $\|\cdot\|$ と表すとき, 次でノルム $\|\cdot\|_q$と $\|\cdot\|_n$を定義する。

$$\begin{aligned} \|f\|_q &\equiv [\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(t)\|^2 dt]^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_n &\equiv \max_t \|f(t)\| \end{aligned}$$

このとき, 次の $Lemma\ 2.19$ が成り立つ。

Lemma 19 次の線形微分方程式系を考える。

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \qquad t \in \mathbf{R} \tag{2.72}$$

ただし, $A(t)$ は連続な 2π周期の行列であり, φ は連続な 2π周期のベクトルである。

(2.75) の同次系方程式

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \quad t \in \mathbf{R} \tag{2.73}$$

の基本解行列を $\Phi(t)$ で表し, $\Phi(0) = E$ (Eは単位行列) であると仮定する。更に,(2.76) が 1 を固有値としてもたないと仮定する。また, 次を定義する。

$$H(t,s) \equiv \begin{cases} \Phi(t)[E - \Phi(2\pi)]^{-1}\Phi^{-1}(s) & 0 \le s \le t \le 2\pi \\ \Phi(t)[E - \Phi(2\pi)]^{-1}\Phi(2\pi)\Phi^{-1}(s) & 0 \le t < s \le 2\pi \end{cases} \tag{2.74}$$

このとき,(2.75) は次のような周期 2πの一意の解 $x(t)$ をもつ。

$$x(t) = \int_0^{2\pi} H(t,s)\phi(s)ds$$

[証明] [25] の $Proposition\ 1$ を参照。 □

ここで, $Schwarz$不等式より, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|H\|_q &\leq [\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k,l} H_{kl}^2(t,s)dsdt]^{\frac{1}{2}} \\ \|H\|_q &\leq [2\pi\cdot\max_t\int_0^{2\pi}\sum_{k,l} H_{kl}^2(t,s)dsdt]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ただし, $H_{kl}(t,s)$ は上記の行列 $H(t,s)$ の成分を表すものとする。
更に, 次の $lemma\ 2.20$ が成り立つ。

Lemma 20 実方程式系

$$F(\alpha)=0 \tag{2.75}$$

が αの定義域 Ωで連続微分可能であると仮定する。更に,(2.78) の近似解を $\alpha=\hat{\alpha}$,(2.78) の αに関する $Jacobian$ を $J(\alpha)$ で表すものとして, 次の $1)\ \sim\ 3)$ が成り立つような定数 $\delta>0,\ 0<\kappa<1$ が存在すると仮定する。ただし, $\alpha=\hat{\alpha}$において $J(\alpha)\neq 0$ であるとする。
1) $\Omega_\delta \equiv \{\ \alpha \mid \|\alpha-\hat{\alpha}\|\leq\delta\ \}\subset\Omega$
2) $\|J(\alpha)-J(\hat{\alpha})\|\leq\frac{\kappa}{M'}\quad for\ \forall\ \alpha\in\Omega_\delta$
3) $\frac{M'r}{1-\kappa}\leq\delta$
ただし, 定数 $r,\ M'$は次を満たす定数である。

$$\begin{aligned} \|F(\hat{\alpha})\| &\leq r \\ \|J^{-1}(\hat{\alpha})\| &\leq M' \end{aligned}$$

このとき,(2.78) は Ω_δ内に一意の解 $\alpha=\overline{\alpha}$をもち, 次が成り立つ。

$$\|\overline{\alpha}-\hat{\alpha}\|\leq\frac{M'r}{1-\kappa}$$

[証明] [25] の $Proposition\ 2$ を参照。 □

更に, 次の $Theorem\ 2.9$ が成り立つ。

Theorem 14 次の非線形微分方程式系を考える。

$$\frac{dx}{dt}=X(x,t)\qquad t\in\mathbf{R} \tag{2.76}$$

ただし, $X(x,t)$ は t に関して 2π周期で, $(x,t)\in D\times\mathbf{R}$ に関して連続微分可能であり, $D\subset\mathbf{R}^n$ は n 次元 $Euclid$ 空間 $\mathbf{R}^n$の領域である。

ここで,(2.79) が D 内に近似解 $x=\overline{x}(t)$ をもち, 次の $1)\sim3)$ を満たすような周期的連続な行列 $A(t)$ と定数 $\delta>0,\ 0<\kappa<1$ が存在すると仮定する。
1) 同次線形方程式系

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y$$

は 1 を固有値としてもたない。
2) $D_\delta\equiv\{\ x\mid\|x-\overline{x}(t)\|\leq\delta\quad for\ \exists\ t\in\mathbf{R}\}\subset D$
3) $\|\Psi(x,t)-A(t)\|\leq\frac{\kappa}{M_1}\quad for\ \forall\ x\ \ such\ \ that\ \ \|x-\overline{x}(t)\|\leq\delta>0,\ t\in\mathbf{R}$
4) $\frac{M'r}{1-\kappa}\leq\delta$
ただし, $\Psi(x,t),\ M_1,\ r$は次の通りである。

$$\begin{cases} \Psi(x,t) & : & X(x,t) \text{ の } x \text{ に関する } Jacobian \\ M_1 & : & \|H\|_n \leq M_1 \text{を満たすような定数} \\ r & : & \|\frac{d\overline{x}(t)}{dt} - X[\overline{x}(t),t]\| \leq r \text{を満たすような定数} \end{cases}$$

このとき,(2.79) は D_δ 内に一意の周期解 $x = \hat{x}$をもち, 次が成り立つ。

$$\|\hat{x} - \overline{x}\| \leq \frac{M'r}{1-\kappa}$$

[証明] 近似解 $\overline{x}(t)$ に対して, 次のように表現できる。

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = X[\overline{x}(t),t] + \eta(t)$$

このとき, これを変形すると,

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = A(t)\overline{x}(t) + \{X[\overline{x}(t),t] - A(t)\overline{x}(t) + \eta(t)\}$$

$\overline{x}(t)$ は 2π周期であるから, $Lemma\ 2.19$ より, 次のようにかくことができる。

$$\overline{x}(t) = \int_0^{2\pi} H(t,s)\{X[\overline{x}(s),s] - A(s)\overline{x}(s) + \eta(s)\}ds$$

ここで, 次のような反復を考える。

$$x_{n+1}(t) = \int_0^{2\pi} H(t,s)\{X[x_n(s),s] - A(s)x_n(s)\}ds \qquad (n = 0,1,...)$$

ただし, $x_0(t) = \overline{x}(t)$ とする。

帰納法を用いて, 次を証明することができる。

$$\begin{cases} \|x_{n+1} - x_n\|_n & \leq & \kappa^n \|x_1 - x_0\|_n \\ \|x_{n+1} - x_0\|_n & \leq & \delta \end{cases}$$

仮定 $2)$ より, この反復は $D_\delta \subset D$内で定義される。
今, $0 < \kappa < 1$ であるので, 列 $x_n(t)$ は $D_\delta \subset D$内に極限を有する。即ち,

$$\hat{x}(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

このとき, 反復列の定義から,

$$\begin{aligned} & \hat{x}(t) - \int_0^{2\pi} H(t,s)\{X[\hat{x}(s),s] - A(s)\hat{x}(s)\}ds \\ = \ & \{\hat{x}(t) - x_{n+1}(t)\} + \{\int_0^{2\pi} H(t,s)[X[x_n(s),s] - A(s)x_n(s)]ds \\ - \ & \int_0^{2\pi} H(t,s)\{X[\hat{x}(s),s] - A(s)\hat{x}(s)\}ds \end{aligned}$$

両辺をノルム評価すると,

$$\|\hat{x}(t) - \int_0^{2\pi} H(t,s)\{X[\hat{x}(s),s] - A(s)\hat{x}(s)\}ds\|_n \leq \|\hat{x} - x_{n+1}\|_n + \kappa\|x_n - \hat{x}\|_n$$

$n \to \infty$ とすると, 右辺は 0 に近づくので,

$$\hat{x}(t) = \int_0^{2\pi} H(t,s)\{X[\hat{x}(s),s] - A(s)\hat{x}(s)\}ds \qquad (1)$$

表現の仕方から, 計算すると,

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = X[\hat{x}(t), t]$$

これは, $\hat{x}(t)$ が (2.79) の解であることを示している。
不等式

$$\|\hat{x}(t) - \overline{x}(t)\| \leq \frac{M_1 r}{1-\kappa}$$

は, 帰納法で示した式において, $x_0(t)$ を $\overline{x}(t)$ にとれば, 導かれる。
ゆえに, 一意性を示せば十分である。

$\hat{x}(t)$ と $\hat{x}'(t)$ という二つの周期解が D_δ内にあると仮定する。
このとき, $\hat{x}(t)$ と同様にして, 次が成り立つ。

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = X[\hat{x}'(t), t] = A(t)\hat{x}'(t) + \{X[\hat{x}'(t), t] - A(t)\hat{x}'(t)\}$$

前回と同様に, $Lemma\ 2.19$ より, $\hat{x}'(t)$ は次のように表現できる。

$$\hat{x}'(t) - \int_0^{2\pi} H(t,s)\{X[\hat{x}'(s), s] - A(s)\hat{x}'(s)\}ds \qquad (2)$$

(1) と (2) の辺々をひいて, ノルム評価すると,

$$\|\hat{x} - \hat{x}'\|_n \leq \kappa \|\hat{x} - \hat{x}'\|_n$$

$0 < \kappa < 1$ より, $\|\hat{x} - \hat{x}'\|_n = 0$, 即ち, $\hat{x} = \hat{x}'$ □

この $Theorem\ 2.9$ によって, 非線形微分方程式系 (2.79) に周期解が存在することを検証できる。しかしながら, この定理の仮定で使われている (2.79) の近似解及び行列 $H(s,t)$ が数値的に評価され, かつ, 定数 $M_1,\ r$が計算されねばならない。そこで, これらの評価方法について説明をする。

(近似解と定数 $r,\ M_1$の評価方法)
　関数 $f(t)$ を周期 2πの連続関数とすると, $f(t)$ は $Fourier$級数展開によって, 次のように表現することができる。

$$f(t) \sim c_0 + \sqrt{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

ここで, 各 $c_0, c_0, d_1, ...$ はベクトルである。
そこで, 関数 $f(t)$ の有限 m 次三角級数を, 次で定めることにする。

$$f_m(t) \equiv c_0 + \sqrt{2} + \sum_{n=1}^{m}(c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

このとき, $f_m(t)$ は m が十分大きいとき, $f(t)$ の良い近似となる。このときの誤差が打ち切り誤差である。この関係を, 打ち切り作用素 P_mを用いて, 次のようにかくことにする。

$$f_m(t) = P_m f(t)$$

今, $\gamma \equiv (c_0, c_1, d_1, ..., c_m, d_m)$ と定義すると,

$$\begin{aligned}\|f_m\|_q^2 &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f_m\|^2 dt \\ &= \|c_0\|^2 + \sum_{n=1}^{m}(\|c_n\|^2 + \|d_n\|^2 \\ &= \|\gamma\|^2\end{aligned}$$

ゆえに, $\|f_m\|_q = \|\gamma\|$

これに関連して, 次の $Lemma\ 2.21$ が成り立つ。

Lemma 21 $f(t)$ を周期 2πの連続微分可能なベクトル値関数と仮定する。このとき, 次の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned}\|f - P_m f\|_n &\leq \sigma(m)\|\dot{f}\|_q \leq \sigma(m)\|\dot{f}\|_n \\ \|f - P_m f\|_q &\leq \sigma_1(m)\|\dot{f}\|_q\end{aligned}$$

ただし, $\cdot$, $\sigma(m)$, $\sigma_1(m)$ は次で定義するものとする。

$$\begin{cases} \cdot &\equiv \frac{d}{dt} \\ \sigma(m) &\equiv \sqrt{2}[\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots]^{\frac{1}{2}} \\ \sigma_1(m) &\equiv \frac{1}{m+1} \end{cases}$$

[証明] [25] の $Lemma\ 2.1$ を参照。 □

更に, 次の $Lemma\ 2.22$ が成り立つ。

Lemma 22 $Theorem\ 2.9$ の前半部分と同じ仮定を仮定する。更に, 次のような非負定数 K, K_1, K_2が存在すると仮定する。

$$\begin{aligned}K &= \max_{D\times\mathbf{R}}\|X(x,t)\| \\ K_1 &= \max_{D\times\mathbf{R}}\|\Psi(x,t)\| \\ K_2 &= \max_{D\times\mathbf{R}}\|\frac{\partial X(x,t)}{\partial t}\|\end{aligned}$$

このとき, D 内に周期解 $x = \hat{x}(t)$ が存在するとき, 次の評価が成り立つ。ただし, $\hat{x}_m(t) = P_m\hat{x}(t)$ とする。

$$\begin{cases} \|\hat{x} - \hat{x}_m\|_n &\leq K\sigma(m) \\ \|\hat{x} - \hat{x}_m\|_q &\leq K\sigma_1(m) \\ \|\dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}}_m\|_n &\leq (KK_1 + K_2)\sigma(m) \end{cases}$$

[証明] [25] の $Lemma\ 2.2$ を参照。 □

この $Lemma\ 2.22$ から, 次の $Lemma\ 2.23$ が導かれる。

Lemma 23 $x = \hat{x}(t)$ が, D内における (2.79) の周期解であると仮定する。このとき, 任意の整数 $m \geq m_0$に対して, 次が成り立つような正整数 m_0が存在 する。

1) $\hat{x}_m(t) \in D$

2) 線形同次系

$$\frac{dy}{dt} = \Psi[\hat{x}_m(t), t]y$$

は 1 を固有値としてもたず, $\Psi[\hat{x}_m(t), t]$ に対応する行列 H_mは一様有界 である。即ち,

$$\exists\ M > 0\ \ such\ \ that\ \ \|H_m\|_q,\ \|H_m\|_n \leq M$$

3) $\frac{d}{dt}\Psi[\hat{x}_m(t),t]$ は一様有界である。即ち,

$$\exists\, K_3 \;\; such \;\; that \;\; \|\frac{d}{dt}\Psi[\hat{x}_m(t),t]\| \leq K_3$$

[証明] [25] の $Corollary$ を参照。 □

この $Lemma\ 2.23$ によって, 定数 $M_1,\ r$を評価することができる。この評価の詳細な説明については,[25] を参照。

以上から, 計算された定数 $r,\ M_1$に対して, $Theorem\ 2.9$ の仮定を満たすように, 定数 $\delta > 0,\ 0 < \kappa < 1$ を定めれば, $Theorem\ 2.9$ より, 非線形微分方程式系 (2.79) の周期解の存在について検証できる。

2.6.2 数値的検証例

2.7 Nakao の方法

2.7.1 境界値問題の定式化

文献 [17] に従い, Nakao の方法を以下で解説する。

次のような境界値問題を考える。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x'' &=& f(t,x,x') \quad t \in J \equiv (a,b) \\ x(a) = x(b) &=& 0 \end{array} \right. \tag{2.77}$$

この境界値問題の解の存在について検証するのが目的である。最初に, その準備として, 必要な定義等について説明をする。

区間 J上 m 次の $L^p - Sobolev$ 空間 $W_p^m \equiv W_p^m(J)$ に対して (以後, 特に断わりのない限り, 関数空間は区間 J上で考えるものとして, 記号 (J) を省くことにする。), $H^m \equiv W_2^m,\ H_0^m \equiv W_{0,2}^m$ とかくことにして, 次で空間 W^1を定義する。

$$W^1 \equiv W_\infty^1 \cap H_0^1$$

今, $u \in W^1$に対して, そのノルム $\|u\|_{W^1}$を, $\|u\|_{W^1} \equiv \|u'\|_{L^\infty}$と定めると, $\|u\|_{W^1}$と $\|u\|_{W_\infty^1}$は同値なノルムとなる。ゆえに, $(W^1, \|\cdot\|_{W^1})$ は $Banach$ 空間となる。

また, 任意の関数 $\psi \in L^\infty$に対して, 関数 $\phi \in W_\infty^2 \cap W^1$を次で定義する。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\phi'' &=& \psi \\ \phi(a) = \phi(b) &=& 0 \end{array} \right. \tag{2.78}$$

ここで, 境界値問題 (2.81) の関数 fに関して, 次の $Assumption\ 2.4$ と $Assumption\ 2.5$ を仮定する。

Assumption 4 $f : W_\infty^1 \longrightarrow L^\infty$ は連続写像である。

Assumption 5 任意の有界集合 $X \subset W_\infty^1$に対して, 集合

$$f(\cdot, X, X') \equiv \{\ f(\cdot, x, x') \mid x \in X\ \} \subset L^\infty$$

は有界集合である。

$Assumption\ 2.4$ と $Assumption\ 2.5$ の下で, 作用素 A を, $A\psi \equiv \phi$で定義すると, コンパクトな埋め込み $W^2_\infty \hookrightarrow W^1_\infty$ によって,

$$A : L^\infty \longrightarrow W^1$$

は, コンパクト作用素となる。

従って, 作用素 Fを $Fx \equiv Af(\cdot, x, x')$ で定義すると,

$$F : W^1 \longrightarrow W^1$$

も, コンパクト作用素となる。

次に, H^1_0内の内積 $\langle\ ,\ \rangle_{H^1_0}$を次で定義する (以後, 特に断わりのない限り, 添字 H^1_0と L^2を省くことにする。) 。

$$\langle \phi, \psi \rangle_{H^1_0} \equiv (\phi', \psi')_{L^2} = \int_a^b \phi'\psi' dx \qquad for\ \forall\ \phi,\ \psi \in H^1_0$$

このとき, 部分積分によって,(2.82) は次の (2.83) と同値になる。

$$(\phi', v') = (\psi, v) \qquad for\ v \in H^1_0,\ \psi \in L^\infty \tag{2.79}$$

境界値問題 (2.81) の弱解 $x \in W^1$を次で定義する。

$$(x', v') = (f(\cdot, x, x'), v) \qquad for\ v \in H^1_0 \tag{2.80}$$

$(2.81$ 式に作用素 A を施すと, 作用素 Fの定義から, $x = Fx \quad in\ \ W^1$ しかも,(2.82) の滑らかさから, $x \in W^2_\infty \cap W^1$
ゆえに, 境界値問題 (2.81) は次のような問題に変換することができる。

$$Find\ \ x \in W^2_\infty \cap W^1\ \ such\ \ that\ \ x = Fx\ \ in\ \ W^1 \tag{2.81}$$

また, W^1の有限次元部分空間 $S_h \subset W^1\ (0 < h < 1)$ を考えて,

$$\begin{cases} x_h \in S_h & : & (2.84) \text{ の近似解} \\ P_h & : & (H^1_0 \text{の意味での}) \text{直交射影} \\ P_h & : & W^1 \longrightarrow S_h \subset W^1 \end{cases}$$

と定めると, 直交射影 P_hの性質から, 次の式が成り立つ。

$$(u' - (P_h u)', v') = 0 \qquad for\ \forall\ v \in S_h,\ u \in W^1 \tag{2.82}$$

更に, P_hに関して, 次の $Assumption\ 2.6$ と $Assumption\ 2.7$ を仮定する。

Assumption 6 作用素 $P_h(I - F'(x_h))$ の S_hへの制限

$$P_h(I - F'(x_h))|_{S_h} : W^1 \longrightarrow S_h$$

は逆写像

$$[I - F'(x_h)]^{-1}_h : S_h \longrightarrow S_h$$

をもつ。ただし, Iは W^1内の恒等写像を表すものとする。

Assumption 7 任意の $x \in W^1 \cap W^2_\infty$ と整数 $p\ (1 \leq p \leq \infty)$ に対して,

$$\|x' - (P_h x)'\|_{L^p} \leq Ch|x|_{W^2_p} \quad for\ \exists\, C > 0,\ |x|_{W^2_p} \equiv \|x''\|_{L^p}$$

が成り立つ。

次に, 正定数 $0 < \varepsilon < 1$ に対して, 作用素 Tを次で定義する。

$$Tx \equiv x - ([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)(I - F)(x) \quad for\ \forall\, x \in W^1 \tag{2.83}$$

(2.87) から変形すると, 作用素 Tは縮小写像とコンパクト作用素の和で表現できるので, $Proposition\ 1.2$ より, Tは W^1から W^1自身への $condensing\ operator$ となる。
ここで, 逆写像 $([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)^{-1}$が存在すれば, 方程式 $x = Tx$ から, $x = Fx$ が導かれる。

こうして, 境界値問題 (2.81) の解を求めるという問題は, 逆写像 $([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)^{-1}$の存在の下に, 作用素 Tの不動点を求めるという問題と同値になることがわかる。

2.7.2 rounding と検証条件

この節では, 前節で定義した作用素 Tの不動点を求めるという問題について考える。

一般に,(2.87) で定義された作用素 Tは無限次元空間上の作用素であるので, 与えられた $x \in W^1$に対して, その像 Tx を計算機内で表現することはできない。従って, 集合 $X \subset W^1$ に対して, 像 TXの丸め $R(TX)$ 及びその丸め誤差 $RE(TX)$ を考えることにする。
まず, 写像 $\tilde{T} : W^1 \longrightarrow S_h$を次で定義する。

$$\tilde{T}x \equiv \tilde{I}x - ([I - F'(x_h)]_h^{-1} + \varepsilon\tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F})(x) \quad for\ \forall\, x \in W^1 \tag{2.84}$$

ただし, $\tilde{I} \equiv P_h I,\ \tilde{F} \equiv P_h F$である。
ここで,(2.88) で定義した作用素 $\tilde{T}$に対して, 上記の $R(TX)$ と $RE(TX)$ を次で定義する。

$$\begin{cases} R(TX) & \equiv & \{\, \tilde{T}x \mid \forall\, x \in X \,\} \\ RE(TX) & \equiv & \{\, \phi \in W^1 \mid \|\phi\|_{W^1} \leq \alpha,\ \|\phi\|_{L^\infty} \leq Ch\alpha,\ P_h\phi = 0 \,\} \end{cases} \tag{2.85}$$

ただし, $\alpha \equiv \sup_{x \in X} \|(T - \tilde{T})\|_{W^1}$とする。

このとき, 集合 $RE(TX) \subset W^1$は W^1の有界凸閉集合であることがわかる。そして, 集合 $R(TX)$ と $RE(TX)$ に関して, 次の $Lemma\ 2.24$ が成り立つ。

Lemma 24 W^1の任意の有界凸閉集合 $X \subset W^1$に対して,

$$R(TX) \oplus RE(TX) \overset{\circ}{\subset} X$$

が成り立つとき, $x = Fx$ を満たす点 $x \in X$が存在する。
ただし, $\oplus$は H_0^1の意味での直交直和を表し, $M \overset{\circ}{\subset} N$は, 集合 Mが集合 Nに強く含まれることを意味する。

[証明] 最初に, W^1の任意の有界凸閉集合 $X \subset W^1$に対して, 次が成り立つことを示す。

$$TX \subset R(TX) \oplus RE(TX) \quad (1)$$

任意の点 $x \in X$に対して, $Tx = \tilde{T}x + (Tx - \tilde{T}x)$ と表すことができて, $\tilde{T}x \in R(TX)$ であるから,(1) を示すためには,

$$Tx - \tilde{T}x \in RE(TX) \quad for\ \forall\ x \in X \quad (2)$$

を示せば十分である。

そこで, 任意の点 $x \in X$をとる。
まず, 直交射影 P_hの定義から, $P_h(Tx - \tilde{T}x) = 0 \quad (3)$
次に, αの定義から, $\|Tx - \tilde{T}x\|_{W^1} \leq \alpha \quad (4)$
(3) より,(2.82) の関数 ϕ及び ψと, 任意の $v \in S_h$に対して, 部分積分から, 次のように評価することができる。

$$\begin{aligned}(Tx - \tilde{T}x, \phi) &= ((Tx - \tilde{T}x)', \phi') \\ &= ((Tx - \tilde{T}x)', \phi' - v') \\ &\leq \|Tx - \tilde{T}x\|_{L^\infty} \int_a^b |\phi' - v'| dx \\ &\leq \|Tx - \tilde{T}x\|_{W^1} \|\phi' - v'\|_{L^1}\end{aligned}$$

ここで, $v = P_h\phi$ ととることができるので, $Assumption\ 2.7$ より, 次のように評価することができる。

$$\begin{aligned}\|\phi' - v'\|_{L^1} &= \|\phi' - (P_h\phi)'\|_{L^1} \\ &\leq Ch|\phi|_{W_2^1} \\ &= Ch\|\phi''\|_{L^1} \\ &= Ch\|\psi\|_{L^1}\end{aligned}$$

以上から, まとめると,

$$\|Tx - \tilde{T}x\|_{L^\infty} \leq Ch\|Tx - \tilde{T}x\|_{W^1} \leq Ch\alpha \quad (5)$$

ゆえに,(3),(4),(5) より,(2) が成り立ち, 従って,(1) が成り立つ。
仮定と (1) より, $TX \overset{\circ}{\subset} X$
よって, $Sadovskii$ の不動点定理によって,

$$\exists\ x \in X \ \ such\ \ that\ \ x = Tx$$

これを,(2.87) に代入すると,

$$([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)(I - F)(x) = 0$$

ここで, 逆写像 $([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)^{-1}$が存在すれば, 求める結論が得られる。即ち, $-\varepsilon$ が $[I - F'(x_h)]_h^{-1}$の固有値でなければよい。
そこで, 固定した ε に対して, $TX \overset{\circ}{\subset} X$が成立するとすれば, この ε の近傍でも, $TX \overset{\circ}{\subset} X$が成り立つ。
このとき, $TX \overset{\circ}{\subset} X$は常に成り立っているので, 結局 ε の値に関係なく, この関係が成り立つ。
　従って, 求める結論が得られる。□

次節では, 上記の $Lemma\ 2.24$ の仮定である有界凸閉集合 $X \subset W^1$の構成について述べる。

2.7.3　計算機上の検証条件

計算機上で, $Lemma\ 3.12$ の仮定を満たす有界凸閉集合 $X \subset W^1$を構成することができれば, $Lemma\ 3.12$ によって, 境界値問題 (2.81) の解の存在について検証できる。従って, そのような $X \subset W^1$を構成することが目的となる。
最初に, 以下のことを定義する。
非負整数の集合を $\mathbf{R}^+$で表し, 任意の $\alpha \in \mathbf{R}^+$に対して次を定義する。

$$[\alpha] \equiv \{\ \phi \in W^1 \mid \|\phi\|_{W^1} \leq \alpha,\ \|\phi\|_{L^\infty} \leq Ch\alpha,\ P_h\phi = 0\ \}$$

更に, 次を定義する。

$$\begin{cases} x_h \in S_h & : \text{境界値問題 } (2.81) \text{ の近似解} \\ \alpha_0 \in \mathbf{R}^+ & : \text{適当な初期値} \\ \{\phi_j\}_{j=1,\cdots,M} & : S_h\text{の基底} \\ \mathcal{S}_h & : \{\phi_j\} \text{ の区間係数の全ての一次結合全体の集合} \end{cases}$$

今, 列 $\Delta x_h^{(n)} \in \mathcal{S}_h$と $\alpha_n \in \mathbf{R}^+$を, 次の反復アルゴリズムで定める。

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= x_h + \Delta x_h^{(n-1)} + [\alpha_{n-1}] \\ \Delta x_h^{(n)} &\equiv R(TX_{n-1}) - x_h \qquad (2.86) \\ \alpha_n &\equiv Ch\|f(\cdot, X_{n-1}, X'_{n-1})\|_{L^\infty} \qquad (2.87) \end{aligned}$$

(2.90) は, 次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \Delta x_h^{(n)} &= -([I - F'(x_h)]_h^{-1} + \varepsilon)(\tilde{I} - \tilde{F})(x_h) + \{I(\Delta x_h^{(n-1)} + [\alpha_{n-1}]) \\ &\quad -([I - F'(x_h)]_h^{-1} + \varepsilon)((\tilde{I} - \tilde{F})(X_{n-1}) - (\tilde{I} - \tilde{F})(x_h)\} \end{aligned} \qquad (2.88)$$

このとき,(2.92) の第 1 項は $\mathcal{S}_h$内の元なので, 次のように表現できる。

$$\overline{\Delta} x_h = \sum_{j=1}^{M} a_j \phi_j$$

次に,(2.92) の第 2 項を次のようにかくことにする。

$$\Delta_2 x_h^{(n)} = \sum_{j=1}^{M} B_j^{(n)} \phi_j$$

ここで, $B_j^{(n)}$は次で決定される。

$$(B_j^{(n)}) = \{(1-\varepsilon)E - G^{-1}D\}(A_j^{(n-1)}) + (G^{-1} + \varepsilon D^{-1})(\Delta f_j^{(n-1)})$$

ただし, $E,\ G,\ D,\ (A_j^{(n-1)}),\ (f_j^{(n-1)})$ は次の通りである。

$$\begin{cases} E & : \ M\text{次元単位行列} \\ G = (g_{ik}) & : [I - F'(x_h)]|_{S_h}\text{に対応する行列} \\ & \quad g_{ik} \equiv \langle (I - F'(x_h))\phi_j, \phi_k \rangle \quad (1 \leq j,k \leq M) \\ D = (d_{jk}) & : \ d_{jk} \equiv \langle \phi_j, \phi_k \rangle \quad (1 \leq j,k \leq M) \\ (A_j^{(n-1)}) & : \Delta x_h^{(n-1)}\text{の区間ベクトル係数, 即ち,} \\ & \quad \Delta x_h^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{M} A_j^{(n-1)} \phi_j \\ (f_j^{(n-1)}) & : \text{次のような区間ベクトル} \\ & \quad f_j^{(n-1)} = \langle \tilde{F}(X_{n-1}) - \tilde{F}(x_h), \phi_j \rangle \quad (1 \leq j \leq M) \end{cases}$$

以上から,(2.90) は次のようにかける。

$$\begin{aligned}\Delta x_h^{(n)} = \overline{\Delta} x_h + \Delta_2 x_h^{(n)} &= \sum_{j=1}^{M} a_j \phi_j + \sum_{j=1}^{M} B_j^{(n)} \phi_j \\ &= \sum_{j=1}^{M} (a_j + B_j^{(n)}) \phi_j\end{aligned}$$

ここで, $\Delta x_h^{(n)} = \sum_{j=1}^{M} A_j^{(n)} \phi_j,\ A_j^{(n)} \equiv [\underline{A}_j^{(n)}, \overline{A}_j^{(n)}]$ に対して, 次を定義する。

$$\| \Delta x_h^{(n)} - \Delta x_h^{(n-1)} \| \equiv \max_{1 \le j \le M} \{\ |\underline{A}_j^{(n)} - \underline{A}_j^{(n-1)}|, |\overline{A}_j^{(n)} - \overline{A}_j^{(n-1)}|\ \}$$

次に, 値の小さな $\delta_1 > 0$ をとり,

$$\begin{cases} \| \Delta x_h^{(n)} - \Delta x_h^{(n-1)} \| < \delta_1 \\ |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \delta_1 \end{cases}$$

を満足するような自然数 $n \in \mathbf{N}$ が存在するとき, 別の $\delta_2 > 0$ に対して, 次を定義する。

$$\begin{cases} \Delta \tilde{x}_h^{(n)} \equiv \Delta x_h^{(n)} + \sum_{j=1}^{M} [-1, 1] \delta_2 \phi_j \\ \tilde{\alpha}_n \equiv \alpha_n + \delta_2 \end{cases} \tag{2.89}$$

(2.93) の組 $(\Delta \tilde{x}_h^{(n)}, \tilde{\alpha}_n)$ の反復アルゴリズム (2.90),(2.91) に対する結果を, それぞれ Δx_h と α とかくことにするとき, 即ち, $\tilde{X} = x_h + \Delta \tilde{x}_h^{(n)} + [\tilde{\alpha}_n]$ に対して,

$$\Delta x_h \equiv R(T\tilde{X}) - x_h \tag{2.90}$$

$$\alpha \equiv Ch \| f(\cdots, \tilde{X}, \tilde{X}') \|_{L^\infty} \tag{2.91}$$

であるとき, 次の $Theorem\ 2.10$ が成り立つ。

Theorem 15 (計算機上での検証条件)
$(\Delta \tilde{x}_h^{(n)}, \tilde{\alpha}_n)$ 及び $(\Delta x_h, \alpha)$ を, それぞれ (2.93) と (2.94),(2.95) で定義するものと仮定する。更に, 次を仮定する。

$$\Delta x_h \overset{\circ}{\subset} \Delta \tilde{x}_h^{(n)} \tag{2.92}$$

$$\alpha < \tilde{\alpha}_n \tag{2.93}$$

このとき, $\tilde{X} = x_h + \Delta \tilde{x}_h^{(n)} + [\tilde{\alpha}_n]$ 内に境界値問題 (2.81) の弱解 $x \in W^1$が存在する。

[証明] 最初に,(2.94) と (2.96) より, 次が成り立つ。

$$R(T\tilde{X}) \subset \Delta x_h + x_h \overset{\circ}{\subset} \Delta \tilde{x}_h^{(n)} + x_h \tag{2.94}$$

次に, 任意の点 $x \in \tilde{X}$に対して,(2.87) と (2.88) より, 整理すると,

$$\begin{aligned} Tx - \tilde{T}x &= (1-\varepsilon)(I - \tilde{I})x + \varepsilon(F - \tilde{F})(x) \\ &\quad [I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h \{(I - F) - (\tilde{I} - \tilde{F})\}(x) \\ &\in (1-\varepsilon)[\tilde{\alpha}_n] + \varepsilon(F - \tilde{F})(\tilde{X}) \end{aligned}$$

$Assumption\ 2.7$ と Fの定義,(2.90),(2.91),(2.87) 等から, 上式の両辺をノルム評価して整理す

ると,

$$\begin{aligned}\|Tx-\tilde{T}x\|_{W^1} &\leq (1-\varepsilon)\tilde{\alpha}_n+\varepsilon\sup_{x\in\tilde{X}}\|(F-\tilde{F})(x)\|_{W^1}\\ &\leq (1-\varepsilon)\tilde{\alpha}_n+\varepsilon Ch\sup_{x\in\tilde{X}}\|f(\cdot,x,x')\|_{L^\infty}\\ &= (1-\varepsilon)\tilde{\alpha}_n+\varepsilon\alpha\\ &< \tilde{\alpha}_n\end{aligned}$$

よって,

$$\|Tx-\tilde{T}x\|_{W^1}\leq\tilde{\alpha}_n \tag{2.95}$$

ここで, 任意の $y\in R(T\tilde{X})\oplus RE(T\tilde{X})$ と, $\|\kappa\|_{W^1}$が十分小さいような $\kappa\in W^1$に対して,(2.98) と (2.99) より, 次が成り立つ。

$$\begin{cases} P_hy+P_h\kappa &\in x_h+\Delta\tilde{x}_h^{(n)}\\ y+\kappa-P_h(y+\kappa) &\in [\tilde{\alpha}_n]\end{cases}$$

ゆえに, $y+\kappa\in[\tilde{\alpha}_n]+x_h+\Delta\tilde{x}_h^{(n)}=\tilde{X}$
これは, 任意の $y\in R(T\tilde{X})\oplus RE(T\tilde{X})$ に対して成り立つので,

$$R(T\tilde{X})\oplus RE(T\tilde{X})\overset{\circ}{\subset}\tilde{X}$$

よって, $Lemma\ 2.24$ より, $\exists\, x\in\tilde{X}\ \ such\ \ that\ \ x=Fx$ □

この $Theorem\ 2.10$ によって, この節で構成した $\tilde{X}\subset W^1$内に, 境界値問題 (2.81) の解が存在することが示された。しかし, $Theorem\ 2.10$ の仮定である (2.96) が得られるためには, 反復アルゴリズム (2.90),(2.91) の列 $(\Delta x_h^{(n)},\alpha_n)$ が収束する必要がある。そこで, この収束条件について考えてみる。
まず, 記号等について定義をし, 引き続いて, これに関係のある事柄について述べる。

最初に, 次を定義する。

$$\begin{cases} Sx &\equiv (I-F)x=x-Afx\\ (S_h')^{-1} &\equiv [I-F'(x_h)]_h^{-1}\\ \|\cdot\| &\equiv \|\cdot\|_{W^1}\end{cases}$$

更に, 任意の作用素 $Q:W^1\longrightarrow W^1$に対して, $\tilde{Q}\equiv P_hQ$ とかくことにする。
次の $Assumption\ 2.8$ を仮定する。

Assumption 8 (1) 方程式 $Sx=0$ は解 $x^*\in W^1$をもつ。
(2) x^*の近傍

$$U=B(\delta;x^*)\equiv\{\ x\in W^1\mid\|x\|\leq\delta\ \}$$

内の全ての点において, Sの $Fréchet$ 微分 $S'(x)$ が存在する。
ただし, 次が成り立つものとする。

$$\begin{cases} \langle S'(x)z,v\rangle &= (z',v')-(\frac{\partial f}{\partial x}z+\frac{\partial f}{\partial x'}z',v) \quad for\ \forall\ z,v\in W^1\\ \frac{\partial f}{\partial x} &: L^\infty\text{内の近傍 }U\text{で一様有界}\\ \frac{\partial f}{\partial x'} &: W^1_\infty\text{内の近傍 }U\text{で一様有界}\end{cases}$$

(3)

$$\|S'(x)-S'(y)\|\leq L\|x-y\| \quad for\ x,y\in U$$

を満たすような定数 $L > 0$ が存在する。
(4) 点 x_hで, $S'(x)$ の逆写像 $[S'(x_h)]^{-1} : W^1 \longrightarrow W^1$が存在して, $\|(S'_h)^{-1}\| \leq C_0 h$ が成り立つ (ただし, C_0は h とは無関係の定数) 。

以上のことをもとに, 次の $Lemma\ 2.25$ が成り立つ。

Lemma 25 $Assumption\ 2.4 \sim Assumption\ 2.8$ のもとに, 十分小さい h と εに対して, $x_h \in V$となるような開近傍 $V(x^*)$ が存在すると仮定する。
このとき, $\Delta x_h^{(0)} = 0,\ \alpha_0 = 0$ で定義された反復アルゴリズムの列 $\{(\Delta x_h^{(n)}, \alpha_n)\}$ は有界である。即ち, 任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\Delta x_h^{(0)}\| < \Delta_0,\ \alpha_0 < \hat{\alpha} \implies \sup_{n\in\mathbf{N}} \|\Delta x_h^{(n)}\| < \Delta_0,\ \alpha_n < \hat{\alpha}$$

が成り立つような正定数 $\Delta_0 > 0$ と $\hat{\alpha} > 0$ が存在する。

[証明] [17] の $Theorem\ 2$ を参照。□

次に, $Theorem\ 2.11$ の準備として, S_hの巾集合 2^{S_h}に, 次のような $Hausdorff$距離を導入する。
任意の $U_h,\ V_h \in 2^{S_h}$に対して, 次を定義する。

$$\begin{cases} D(U_h, V_h) & \equiv & \max\{\sup\limits_{\phi\in U_h} d(\phi, V_h), \sup\limits_{\psi\in V_h} d(\psi, U_h)\} \\ d(\phi, V_h) & \equiv & \inf\limits_{\psi\in V_h} \|\phi - \psi\|_{W^1} \end{cases} \tag{2.96}$$

そこで, 十分小さい $h > 0$ に対して, 点 $x_h \in S_h$が x^*の十分良い近似になっているとき, 解の存在が検証できるということが, 次の $Theorem\ 2.11$ で示される。

Theorem 16 (収束に関する定理)
$Lemma\ 2.25$ と同じ仮定を仮定する。
このとき, 反復列 $(\Delta x_h^{(n)}, \alpha_n)$ は, $2^{S_h} \times \mathbf{R}^+$内で一意の極限を有する。即ち,

$$(\Delta x_h^{(n)}, \alpha_n) \longrightarrow \exists\, (x^*, \alpha^*) \in 2^{S_h} \times \mathbf{R}^+ \quad (n \to \infty)$$

[証明] 証明の前半部分は,[17] の $Theorem\ 2$ を参照。後半部分は,[12] の $Theorem\ 2$ を参照。□

2.7.4 一意性について

前節の 2.7.3 節では, 有界凸閉集合 $X = x_h + \Delta x_h + [\alpha]$ 内で, 境界値問題 (2.81) の弱解を求めることができた。この節では, 同じ集合 $X \subset W^1$内での (2.81) の解の一意性について考える。
最初に, 次の $Assumption\ 2.9$ を仮定する。

Assumption 9 集合 $X \subset W^1$に対して, $K(X)$ を Xに依存する
$condensing\ linear\ operator$ の集合全体とするとき, 任意の点 $x_1,\ x_2 \in K(X)$ と 2.7.1 節の関数 Fに対して, 次が成り立つ。

$$\exists\, \kappa \in K(X)\ \ such\ \ that\ \ Fx_1 - Fx_2 = \kappa(x_1 - x_2) \tag{2.97}$$

次に,(2.81) の関数 fに対して,

$$L(X) \equiv I - ([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)(I - K(X)) \tag{2.98}$$

と定義すると, 集合 $L(X)$ は, *condensing linear operator* 全体の集合となる。
そこで,2.7.2 節の拡張として, 以下のことを定義する。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(X) & \equiv & Tx_h + L(X)(X - x_h) \\ R(\mathcal{L}(X)) & \equiv & \{\ \tilde{x} \in s_h \mid \tilde{x} = \tilde{T}x_h + \tilde{l}(x - x_h) \quad for\ l \in L(X),\ x \in X\ \} \\ RE(\mathcal{L}(X)) & \equiv & \{\ \phi \in W^1 \mid \|\phi\|_{W^1} \leq \alpha,\ \|\phi\|_{L^\infty} \leq Ch\alpha,\ P_h\alpha = 0\ \} \\ \tilde{l} & \equiv & P_h l \\ \alpha & \equiv & \|(T - \tilde{T})x_h\|_{W^1} + \sup \|(l - \tilde{l})(x - x_h)\|_{W^1} \end{array} \right.$$

このとき, *Lemma* 2.24 の拡張として, 次の *Lemma* 2.26 が成り立つ。

Lemma 26 有界凸閉集合 $X \subset W^1$に対して, $x_h \in x$ であり, *Assumption* 2.9 が成り立つと仮定する。更に, 次が成り立つと仮定する。

$$R(\mathcal{L}(X)) \oplus RE(\mathcal{L}(X)) \overset{\circ}{\subset} X$$

このとき, $x = Fx$ となる一意の点 $x \in X$が存在する。

[証明] (2.101) と (2.102) より, 任意の $x \in X$に対して,

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & Tx_h + (Tx - Tx_h) \\ & = & Tx_h + (x - x_h) \\ & & -([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)\{(I - F)(x) - (I - F)(x_h)\} \end{array}$$

ゆえに, $Tx \in \mathcal{L}(X) \quad (1)$
従って, $R(\mathcal{L}(X))$ の定義より, $\tilde{T}x \in R(\mathcal{L}(X))$
更に, $Tx - \tilde{T}x$ を W^1 ノルムで評価すると,

$$\begin{array}{rcl} \|(T - \tilde{T})x\| & \leq & \|(T - \tilde{T})x_h\| + \sup_{l,x} \|(l - \tilde{l})(x_h - x)\| \\ & \leq & \alpha \end{array}$$

ゆえに, $RE(TX) \subset RE(\mathcal{L}(X))$
(1) と仮定より, 次が成り立つ。

$$R(TX) \oplus RE(TX) \subset R(\mathcal{L}(X)) \oplus RE(\mathcal{L}(X)) \overset{\circ}{\subset} X$$

従って, *Lemma* 2.24 より,

$$\exists\ x \in X \ \ such\ \ that\ \ x = Fx$$

後は, 一意性を示せば十分である。

$$\begin{array}{l} \exists\ x_1 \in X \ \ such\ \ that\ \ x_1 = Fx_1 \\ \exists\ x_2 \in X \ \ such\ \ that\ \ x_2 = Fx_2 \end{array}$$

と仮定すると, *Assumption* 2.9 より,

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & F(x_1) - F(x_2) \\ & = & \kappa(x_1 - x_2) \end{array}$$

$\exists\ (I - \kappa)^{-1}$だから, $x_1 - x_2 = 0$, 即ち, $x_1 = x_2$ □

計算機上では,2.7.3 節の系として, 次のようにとる。

$$\begin{cases} \Delta x_h^{(0)} & \subset & S_h \\ \alpha_0 & \in & \mathbf{R}^+ \\ X & = & x_h + \Delta x_h^{(n-1)} - [\alpha_{n-1}] \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Delta x_h^{(n)} & = & R(\mathcal{L}(X)) - x_h \\ \alpha_n & = & Ch\|f(\cdot, x_h, x_h')\|_{L^\infty} + \sup_{\kappa \in K(X)} \|(\kappa - \tilde{\kappa})(\Delta x_h^{(n-1)} + [\alpha_{n-1}])\|_{W^1} \end{cases}$$

以上のことをもとに, 次の $Theorem\ 2.12$ によって, 境界値問題 (2.81) の解の一意性が示される。

Theorem 17 次のことを仮定する。

$$\begin{cases} \tilde{X} & = & x_h + \Delta \tilde{x}_h^{(n)} + [\tilde{\alpha}_n] \\ \Delta x_h & = & R(\mathcal{L}(\tilde{X})) - x_h \\ \alpha & = & Ch\|f(\cdot, x_h, x_h')\|_{L^\infty} + \sup_{\kappa \in K(X)} \|(\kappa - \tilde{\kappa})(\Delta \tilde{x}_h^{(n)} + [\tilde{\alpha}_n])\|_{W^1} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Delta x_h & \overset{\circ}{\subset} & \Delta \tilde{x}_h^{(n)} \\ \alpha & < & \tilde{\alpha}_n \end{cases}$$

このとき, $x = Fx$ となる点 $x \in \tilde{X}$が一意に存在する。
[証明]

$$R(\mathcal{L}(\tilde{X})) \oplus RE(\mathcal{L}(\tilde{X}) \overset{\circ}{\subset} X$$

を示せば, $Lemma\ 2.26$ より, 証明は完了する。

$Tx \in \mathcal{L}(X)$ と (2.96) より, 次が成り立つ。

$$R(\mathcal{L}(\tilde{X})) \overset{\circ}{\subset} \Delta x_h + \Delta \tilde{x}_h^{(n)} \quad (1)$$

次に, 任意の $l \in \mathcal{L}(\tilde{X})$ と $x \in \tilde{X}$に対して, $\tau X \equiv \tau x_h + l(x - x_h)$ と定義する。
ある $\kappa \in K(\tilde{X})$ が存在して, $l = I - ([I - F'(x_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)(I - \kappa)$ であるとき,

$$\begin{aligned} \|\tau x - \tilde{\tau} x\| &\leq \|Tx_h - \tilde{T} x_h\| + \|(l - \tilde{l})(x - x_h)\| \\ &\leq \varepsilon Ch\|f(\cdot, x_h, x_h')\|_{L^\infty} + (1 - \varepsilon)\tilde{\alpha}_n \\ &\quad + \varepsilon \sup_{n \in \mathbf{N}} \|(\kappa - \tilde{\kappa})(\Delta \tilde{x}_h^{(n)} + [\tilde{\alpha}_n]\| \\ &= (1 - \varepsilon)\tilde{\alpha}_n + \varepsilon \alpha \\ &< \tilde{\alpha}_n \quad (2) \end{aligned}$$

ここで, $Tx_h - \tilde{T} x_h = \varepsilon(F - \tilde{F})(x_h)$
(1) と (2) から, $Theorem\ 2.10$ の証明と同様の議論をすれば,

$$R(\mathcal{L}(\tilde{X})) \oplus RE(\mathcal{L}(\tilde{X}) \overset{\circ}{\subset} X$$

を示すことができる。□

2.7.5 数値的検証例

Chapter 3

考察

以下では, 第 2 章で述べた各方法の特徴について, 考察してみる。

最初に, 区間法である Lohner の方法についてであるが, この方法は Nakao の方法と同じように, 境界値問題を同値な不動点形式に変換して, $Banach$ 空間内の不動点定理によって, 解の存在の検証を行っている。ここでは, 求める解がその不動点となるように作用素を構成するといった技法が用いられている。Lohner の包み込みの方法は, $Taylor$の定理を用いて誤差項を評価しているので, その次数を上げることによって, 高精度化することが可能である。背景として必要な数学的知識は少ないので, 非専門家にも扱い易く, 自動微分法との組合せにより, 高効率の達成が容易である。また,2.1.4 節での行列 B_{j+1}の座標変換に基づき,$wrapping\ effect$ による包み込む区間の拡大を防いでいるので, 他の区間法 (例えば, Kaucher-Miranker[6]) に比べて優れている。更に, 大規模な連立方程式を解く必要がないので, 計算機上で実現する場合, メモリを少量化することができ, パソコンでも実現可能である。PASCAL-SC による実用レベルのソフトとしても提供されており, ヨーロッパを中心とするこの分野の研究者たちの間でも高く評価されている。

しかし, 一方で, その構成が陽的スキームであるために, 初期値問題として $stiff$な問題には適用できないという欠点がある。

次に, 解析的方法である Plum の方法であるが, この方法は, 偏微分方程式 (楕円型境界値問題) にもそのまま適用できるという特徴がある。線形化逆作用素ノルムを, もとの作用素の最小固有値の逆数として評価しているので, Urabe タイプのものよりも粗い近似解で検証が可能である。つまり, 近似解で高精度のものを必要とせず, 例えば $10^{-2} \sim 10^{-3}$程度のものでも検証が可能であり, Urabe の方法の近似解の精度 $10^{-8} \sim 10^{-9}$と比べて, はるかに粗い近似解で十分である。

しかし, 一方で, 固有値及び固有関数の計算は一般に複雑であり, 近似多項式も高次のものが必要であるという点に問題がある。特に, u'の項が含まれた場合, この方法の検証手順は非常に複雑となる。また, 問題の定式化からわかるように, 近似解として滑らかな H^2クラスの近似解を必要とする。

Schröder の方法は, 限られた範囲 ($inverse - positive$ 条件下) では効率の良い検証方法であることが特徴である。しかしながら, u'の項が含まれた場合, 計算が複雑となる。問題の定式化から, その近似解が C^2クラスであることも必須条件である。また, $inverse - positive$ 条件のために適用範囲も狭い。

McCarthy の方法は, $Kantorovich$ の定理を利用した検証方法としては, Kedem の方法よりも古い。問題の定式化は, 境界値問題を同値な $Volterra$ 型積分方程式に変換するというも

のであり, 非専門家にも扱い易いところは Lohner の方法と同じ特徴を有する。しかしながら, $Kantorovich$ の定理における線形化逆作用素ノルムの評価が Kedem の方法より評価し易い反面, その評価値が大きくなり, 検証不能となる場合がある。また, Urabe の方法と同様の高精度の近似解を必要とする。

Kedem の方法は, McCarthy の方法と同じく, $Kantorovich$ の定理を利用した検証方法であるが, McCarthy の方法に比べて逆作用素ノルムの評価に優れている。また, 幅広い境界値問題 (例えば, 高階境界値問題, 多点境界値問題, ベクトル値境界値問題) に対して適用が可能である。しかし, 一方で, 区分的 6 次多項式を用いるために, 検証手順は一般に複雑である。

Urabe の方法は, 解析的検証法の中では最も古く, 高階方程式への適用も可能である。しかし, 論文 [25], [27] において, 基本解行列のノルム評価が不完全であるために, その検証方法は厳密性に欠けている。山口-吉原-西田 [28] は, 高精度の差分法を適用して近似解と基本解行列を構成し, 定数 M_1を厳密に評価することによって, これを改良している。なお, Urabe の方法では, $10^{-8} \sim 10^{-9}$程度の高精度近似解も必要である。

最後に, 混合法である Nakao の方法であるが, この方法は偏微分方程式にも適用が可能である。2.7.3 節から, 近似解の計算と検証手順が同じスキームで可能であることがわかる。Plum の方法とは異なって, 逆作用素ノルムの評価が不必要であり, 一層粗い近似解でも検証できるという点が特徴である。例えば, 区分的 1 次多項式でも検証可能である。しかし, 逆に, 高次の区分多項式を用いても検証能力があまり向上しないという問題点がある。

以上, 現在までに提案されている常微分方程式に対する主な数値的検証法について概観した。これらの中には, 既に十分な実用レベルに達したものもあるが, まだ何れの方法も真に有効な検証法として定着する段階には至っていない。今後, 数理科学上に現われる多くの問題に対する実際の適用を経て, 各方法の評価が定まるものと思われる。

Bibliography

[1] P.G.Ciarlet : The Finite Element Method for Elliptic Problems , *North-Holland,Amsterdam* (1978).

[2] E.A.Coddington : Theory of Ordinary Differential Equations , *International Series in Pure and Applied Mathematics ,New York, McGraw-Hill* (1955).

[3] H.Ehlich und K.Zeller : Schwankung von Polynomen zwischen Gitterpunken , *Math.Z. 86,* (1964),41—44.

[4] W.B.Gragg and R.A.Tapia : Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich theorem , *SIAM J.Numer.Annal. 11,* (1974),10—13.

[5] L.V.Kantorovich and G.P.Akilov : Functional Analysis in Normed Spaces , *Pergamon Press,New York,* (1964).

[6] E.W.Kaucher and W.L.Miranker : Self-Validating Numerics for Function Space Problems , *Academic Press,New York,* (1984).

[7] G.Kedem : A posteriori error bounds for two-point boundary value problems , *SIAM J.Numer.Annal. 18,* (1981),431—448.

[8] R.J.Lohner : Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems , *Computerarithmetic* (*eds.Kaucher,E.et al.*), *B.G.Teubner,Stuttgart,* (1987),255—286.

[9] R.J.Lohner : Einschließung der Lösung gewöhnlicher Anfangs- und Randwertaufgaben und Anwendungen , *Doctoral Dissertation, University of Karlsruhe* (1988).

[10] M.A.McCarthy and R.A.Tapia : Computable a posteriori L^{∞}-error bounds for the approximate solution of two-point boundary value problems , *SIAM J.Numer.Annal. 12,* (1975),919—937.

[11] R.E.Moore : Interval Analysis , *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey,* (1966).

[12] M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems , *Japan Journal of Applied Mathematics,5,* (1988),313—332.

[13] M.T.Nakao : A Computational Verification Method of Existence of Solutions for Nonlinear Elliptic Equations , *Lecture Notes in Num. Appl. Anal., 10,* (1989),101—120.

[14] M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems II, *Japan Journal of Applied Mathematics,7,* (1990),477—488.

[15] 中尾充宏： 関数方程式の解の存在に対する数値的検証法 , 数学 42 (1990), 16—31.

[16] 中尾充宏： 精度保証付き数値計算の現状と動向 , 情報処理 *Vol.31 No.9,* (1990), 1177—1190.

[17] M.T.Nakao : A Numerical Verification Method for the Existence of Weak Solutions for Nonlinear BVP , *to appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications,163* (1992).

[18] M.Plum : Eigenvalue inclusions for second-order ordinary differential operators by a numerical homotopy method , *J.Appl.Math.Phys. (ZAMP)41,* (1990),205—226.

[19] M.Plum : Verified existence and inclusion results for two-point boundary value problems , *Proceedings of the International Symposium SCAN-89 (Basel 1989),to appear in: IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics,* (1990),341—355.

[20] M.Plum : Computer-Assisted Existence Proofs for Two-Point Boundary Value Problems , *Computing 46,* (1991), 19—34.

[21] J.Schröder : Operator inequalities , *Academic Press,New York,* (1980).

[22] J.Schröder : Existence proofs for boundary value problems by numerical algorithms , *Report Univ. Cologne,* (1986).

[23] R.A.Tapia : The weak Newton method and boundary value problems , *SIAM J.Numer.Annal. 6,* (1969),539—550.

[24] R.A.Tapia : Newton's method for problems with equality constrains , *SIAM J.Numer.Annal. 11,* (1974),174—196.

[25] M.Urabe : Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems , *Arch.Rat.Mech.Annal. 20,* (1965),120—152.

[26] M.Urabe : The Newton method and its application to boundary value problems with nonlinear boundary condition , *in Proc.US-Japan seminar on differential and functional equations,* (1967),383—410.

[27] M.Urabe : Numerical investigation of subharmonic solutions to Duffing's equation , *Publ. RIMS,Kyoto Univ.,5* (1969),79—112.

[28] 山口昌也, 吉原英昭, 西田孝明： 微分方程式に対する保証付き数値計算, 情報処理 *Vol.31 No.9,* (1990), 1197—1203.

[29] E.Zeidler : Nonlinear functional analysis and its applications I , *Springer,New York,* (1986).