一般化固有値問題の精度保証付き計算とその応用

指導教官：中尾充宏 教授
提出者：田中得登
提出日：1998 年 1 月 30 日

序

一般化固有値問題における絶対値最大固有値の精度保証付き評価を行うのが本論文の目的である．これは高次の行列に関しては理論的に行うのが困難であるので，コンピュータを用いて数値計算することを考える．コンピュータによる一般化固有値問題の解法は既に存在しているが，それらは一般に近似計算であり，その結果は厳密には正しいとは言えない．そこで，演算の結果を常に包含する区間演算を用い，厳密に精度保証された計算を行う方法を開発する．これを用いれば，非線形偏微分方程式をはじめとする関数方程式の解に対する数値的検証法の過程で必要となる構成的誤差評価が可能となる．本論文では，既存の精度保証付き解法 2 つと，それを改良した 2 つの方法をコンピュータ上に実装して性能評価を行い新たな知見を得た．さらに応用として Stokes 方程式の有限要素解に対する a priori 誤差評価定数を厳密に算定した．

1　研究の背景

関数方程式の数値的検証において，一般化固有値問題の評価が必要となる過程を述べる．

まず，与えられた偏微分方程式を不動点問題に書き換える．

$$u = F(u),\ \ u \in X$$

ここに，X は無限次元関数空間であり，F はその上のコンパクト写像である．不動点定理により，空でない集合 $U \subset X$ が存在して以下の包含関係が成り立てば，多くの場合において解の存在を確認できる．

$$F(U) \subset U,\ \ F(U) = \{F(U) | u \in U\}$$

X_h を X のパラメータ h $(0 < h < 1)$ に依存する有限次元部分空間とし，P_h を X から X_h への projection とする．これを用いて上の包含関係を有限次元部分と無限次元部分に分ける．

$$\begin{aligned} P_h F(U) &\subset P_h U \\ (I - P_h)F(U) &\subset (I - P_h)U \end{aligned}$$

I は恒等写像である．前者は有限次元なのでコンピュータで計算可能である．後者は無限次元なので，十分条件である下式を考える．

$$\sup_{u \in U} \|(I - P_h)F(U)\|_X \leq \sup_{u \in U} \|(I - P_h)u\|_X \tag{1}$$

ここで，仮定

$$\|(I - P_h)F(v)\|_X \leq C(h)\|f(v)\|_Y, \forall v \in X \tag{2}$$

が成立するとする．Y は $X \subset Y$ なる関数空間，f は X から Y への有界連続な非線形写続である．すると (1) 式の代わりに

$$C(h)\sup_{u\in U}\|f(u)\|_Y \le \sup_{u\in U}\|(I-P_h)u\|_X$$

を考えれば良いことになる．これは評価可能である．

仮定 (2) における定数算定は一般化固有値問題へ帰着することが可能なことを述べる．

$a(\cdot,\cdot)$ を $X\times X$ 上の連続な双一次形式，$(\cdot,\cdot)$ を Y 上の内積とする．さらに $a(\cdot,\cdot)$ は次の性質を持つと仮定する．f の値域に属する任意の $g\in Y$ に対して，

$$a(\phi,v)=(g,v),\quad \forall v\in X$$

を満たす $\phi\in X$ が存在する．対応 $g\mapsto\phi$ を $\phi=Bg$ で表す．F は $F(u)=Bf(u)$ と書ける．また B の値域に属する ϕ に対しては $g=A\phi$ と書くことにする．

ここで，

$$\|\phi-P_h\phi\|_X \le C_1(h)\|A\phi-AP_h\phi\|_Y$$

は評価可能であると仮定する $(\mathrm{cf.}[10])$．

P_0 を Y から X_h への projection とする．projection の性質より，各 $g\in Y$ に対して以下を満たす θ が存在する．

$$\|P_0g\|_Y = \|g\|_Y\sin\theta$$
$$\|g-P_0g\|_Y = \|g\|_Y\cos\theta$$

また，X_h 上の線形作用素 B_h が存在して，

$$P_h\phi = B_hP_0g$$

以上のことから，

$$\begin{aligned}\|A\phi-AP_h\phi\|_Y &\le \|g-P_0g\|_Y+\|P_0g-AP_h\phi\|_Y\\ &= \|g\|_Y\cos\theta+\|(I-AB_h)P_0g\|_Y\\ &\le \|g\|_Y\cos\theta+\Lambda\|g\|_Y\sin\theta\\ &\le \sqrt{1+\Lambda^2}\|g\|_Y\end{aligned}$$

ただし Λ は以下を満たす正の定数．

$$\Lambda^2=\sup_{g\in Y}\frac{\|(I-AB_h)P_0g\|_Y^2}{\|P_0g\|_Y^2}$$

よって，

$$C(h)=C_1(h)\sqrt{1+\Lambda^2}$$

また，projection の性質から，

$$(AB_hP_0g,P_0g)=\|P_0g\|_Y^2$$

なので，

$$1+\Lambda^2=\sup_{g\in Y}\frac{\|AB_hP_0g\|_Y^2}{\|P_0g\|_Y^2}$$

右辺は有限次元の問題であり，行列の一般化固有値問題 (最大固有値) に帰着される．

2　一般化固有値問題

一般化固有値問題，

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx \\ x &\in R^n \\ A &: n \times n\text{対称行列} \\ B &: n \times n\text{対称, 正定値な行列} \end{aligned}$$

の絶対値最大固有値を評価したい．これを書き換えると，

$$\gamma = \sup_{x \in R^n} \left| \frac{x^T A x}{x^T B x} \right|$$

となる．この γ の評価を行う．

精度保証を行わない固有値問題の近似解法としては，二分法，**QR** 法などがある ([14])．

3　精度保証付き解法

具体的な精度保証付き最大固有値の評価法について述べる．

3.1　区間演算

コンピュータによる浮動小数点演算に伴う丸め誤差を回避するため，区間演算を用いることが提案されている．これは数を区間で表現し，演算ごとに誤差を包み込む手法である．ただし区間演算は浮動小数点演算に比べて計算コストがかかるという問題がある．

区間 $X \equiv [\underline{x}, \overline{x}], Y \equiv [\underline{y}, \overline{y}]$ に対して演算を以下の様に定める．

$$\begin{aligned} X + Y &\equiv [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \\ X - Y &\equiv [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] \\ X \times Y &\equiv [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}, max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}] \\ 1/Y &\equiv [1/\overline{y}, 1/\underline{y}], \text{ if } 0 \notin Y \\ X/Y &\equiv X \times (1/Y) \end{aligned}$$

実際にコンピュータ上では誤差を包み込むために Bit 操作を行う．足し算の場合．

$$A + B \subset [\underline{a+b}, \overline{a+b}],$$

$\underline{a+b}$: コンピュータ上で表現可能な$\underline{a} + \underline{b}$より小さく，最も近い浮動小数点

$\overline{a+b}$: コンピュータ上で表現可能な$\overline{a} + \overline{b}$より大きく，最も近い浮動小数点

例えば Fortran 90 では，NEAREST 関数を用いることで可能になる．

3.2 近似対角化法

最大固有値の精度保証付き評価法の一つ目，近似対角化法 (Approximate Diagonalization Method)([19]) の概要を述べる．まず一般化固有値問題を通常の固有値問題に直す．それから近似的な対角化を行い，最後にノルムの定義から絶対値最大固有値を評価する．

まずアルゴリズムを述べる．(アルゴリズムに関する注釈を参照)

アルゴリズム:ADM

1. Cholesky 分解 $B = CC^T$ を行う (Interval)
2. $E = C^{-1}AC^{-T}$ を計算する (Interval)
3. 近似対角化行列として，E の固有ベクトルを並べた行列 $\tilde{T}$ を計算する (Floating)
4. $X_1 = \tilde{T}^T E\tilde{T},\ X_2 = (\tilde{T}^T\tilde{T})^{-1}$ を計算する (Interval)
5. $\|X_1\|_2 \leq \lambda_1,\ \|X_2\|_2 \leq \lambda_2$ を計算する (Interval)
6. $\gamma \leq \lambda_1 \times \lambda_2$ (Interval)

アルゴリズムに関する注釈

- アルゴリズム中の Floating は浮動小数点演算であり近似的な計算である．Interval は区間演算による厳密な計算である．
- 行列のうち C の様にチルダが付いていない行列は各要素が区間であるような行列，区間行列である．$\tilde{C}$ のようにチルダ付きのものは近似計算により算出されたもので，通常の行列である．
- 区間行列に対して浮動小数点演算する場合は各要素の中点をとった行列を用いる
- 近似的な固有値，固有ベクトルの算出には既知の方法を用いる．

アルゴリズムの証明を述べる．

Theorem 1 一般化固有値問題の絶対値最大固有値 γ は，アルゴリズム ADM の λ_1,λ_2 によって，

$$\gamma \leq \lambda_1 \times \lambda_2$$

で評価される．

Proof. A,B は区間行列だが，A はその中で対称なもの，B は対称で正定値なものだけを考える．

B は対称で正定値なので以下の様に Cholesky 分解可能である ([3])．

$$B = CC^T,\ \ C : \text{下三角行列}$$

評価したい値を γ とすると，$B = CC^T$ より，

$$\gamma = \sup_{x \in R^n} \left| \frac{x^T A x}{x^T B x} \right| = \sup_{y \in R^n} \left| \frac{y^T C^{-1} A C^{-T} y}{y^T y} \right|$$

ここまでが通常の固有値問題に直す過程である．

$E = C^{-1} A C^{-T}$ とおく．E の近似的に計算した固有ベクトルを並べた行列，近似対角化行列を $\tilde{T}$ とすると，

$$\sup_{y \in R^n} \left| \frac{y^T C^{-1} A C^{-T} y}{y^T y} \right| = \sup_{z \in R^n} \left| \frac{z^T \tilde{T}^T E \tilde{T} z}{z^T \tilde{T}^T \tilde{T} z} \right|$$

となる．これは，

$$\sup_{z \in R^n} \left| \frac{z^T \tilde{T}^T E \tilde{T} z}{z^T \tilde{T}^T \tilde{T} z} \right| \leq \|\tilde{T}^T E \tilde{T}\|_2 \times \|(\tilde{T}^T \tilde{T})^{-1}\|_2$$

である．ここで，行列のノルムの定義は，

$$\|X\|_p \equiv \sup_{x \neq 0} \frac{\|Xx\|_p}{\|x\|_p}$$

である．また対称な X に対して一般に，

$$\|X\|_2 \leq \|X\|_\infty$$

が成り立ち $(\mathrm{cf.}[3])$，さらに，

$$\|X\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|$$

である $([3])$．よって行列の 2 ノルムは定数で押さえられ，

$$\gamma \leq \lambda_1 \times \lambda_2$$

を得る． □

近似対角化法では区間演算で $\mathrm{Cholesky}$ 分解を行うため，計算コストの上で不利である．その上，行列の優対角性の度合い[1]が弱い場合は $\mathrm{Cholesky}$ 分解そのものが失敗する場合もある．これは区間演算を繰り返すうちに区間幅が拡大し，区間内に 0 を含むようになり，除算が不可能になるからである．この点を改めたのが次節の改良・近似対角化法である．

[1] 本論文において優対角性の度合いが強いと言う場合は，行列の対角成分が非対角成分に比べて大きいということである．弱いと言う場合は小さいということである．行列は優対角であるとは限らない．

3.3 改良・近似対角化法

改良・近似対角化法 (Approximate Diagonalization Method-Advanced) は近似対角化法を一部改めたものである．近似対角化行列は近似的に求めるだけで良い点に着目し，Cholesky 分解を近似計算に置き換え，全体を整えた．

アルゴリズム:**ADM-A**

1. Cholesky 分解 $B \approx \tilde{C}\tilde{C}^T$ を行う (Floating)
2. $\tilde{C}^{-1}A\tilde{C}^{-T}$ を計算する (Floating)
3. 近似対角化行列として，$\tilde{C}^{-1}A\tilde{C}^{-T}$ の固有ベクトルを並べた行列 $\tilde{T}$ を計算する (Floating)
4. $\tilde{P} = \tilde{T}^T\tilde{C}^{-1}$ を計算する (Floating)
5. $X_1 = \tilde{P}A\tilde{P}^T$, $X_2 = (\tilde{P}B\tilde{P}^T)^{-1}$ を計算する (Interval)
6. $\|X_1\|_2 \leq \lambda_1$, $\|X_2\|_2 \leq \lambda_2$ を計算する (Interval)
7. $\gamma \leq \lambda_1 \times \lambda_2$ (Interval)

Theorem 2 一般化固有値問題の絶対値最大固有値 γ は，アルゴリズム ADM-A の λ_1,λ_2 によって，

$$\gamma \leq \lambda_1 \times \lambda_2$$

で評価される．

Proof. A,B は区間行列だが，A はその中で対称なもの，B は対称で正定値なものだけを考える．

B の各要素の中点をとった行列を近似的に Cholesky 分解したものを $\tilde{C}$ とする．

$$B \approx \tilde{C}\tilde{C}^T$$

評価する値を γ とすると，

$$\gamma = \sup_{x \in R^n} \left| \frac{x^T A x}{x^T B x} \right| = \sup_{y \in R^n} \left| \frac{y^T \tilde{C}^{-1} A \tilde{C}^{-T} y}{y^T \tilde{C}^{-1} B \tilde{C}^{-T} y} \right|$$

$\tilde{C}^{-1}A\tilde{C}^{-T}$ の近似対角化行列を $\tilde{T}$ とすると，

$$\sup_{y \in R^n} \left| \frac{y^T \tilde{C}^{-1} A \tilde{C}^{-T} y}{y^T \tilde{C}^{-1} B \tilde{C}^{-T} y} \right| = \sup_{z \in R^n} \left| \frac{z^T \tilde{T}^T \tilde{C}^{-1} A \tilde{C}^{-T} \tilde{T} z}{z^T \tilde{T}^T \tilde{C}^{-1} B \tilde{C}^{-T} \tilde{T} z} \right|$$

となる．これは，

$$\sup_{z \in R^n} \left| \frac{z^T \tilde{T}^T \tilde{C}^{-1} A \tilde{C}^{-T} \tilde{T} z}{z^T \tilde{T}^T \tilde{C}^{-1} B \tilde{C}^{-T} \tilde{T} z} \right| \leq \|\tilde{T}^T \tilde{C}^{-1} A \tilde{C}^{-T} \tilde{T}\|_2 \times \|(\tilde{T}^T \tilde{C}^{-1} B \tilde{C}^{-T} \tilde{T})^{-1}\|_2$$

と書ける．よって近似対角化法と同様に，

$$\gamma \leq \lambda_1 \times \lambda_2$$

を得る． □

改良・近似対角化法は，近似対角化法や Rump の方法 (後述) のように区間演算による Cholesky 分解をする必要が無く，したがってそれらの方法に比べて区間拡大による計算の破綻が起こりにくい．また一般化 Rump 法 (後述) のように適当なパラメータを設定する必要が無いという利点もある．

3.4 Rump の方法

Rump の方法 (Rump's Method)(cf.[12]) は，近似対角化法と同じく，一般化固有値問題を通常の固有値問題に直す．それから最大固有値を近似計算し，真の値を上回ることを期待して僅かに膨らませる．数ステップの処理の後，定理を用いて評価する．

アルゴリズム:RM

1. Cholesky 分解 $B = CC^T$ を行う (Interval)
2. $E = C^{-1}AC^{-T}$ を計算する (Interval)
3. γ の近似 $\tilde{\beta}$ を計算する (Floating)
4. 適当に選んだ小さな $\delta > 0$ に対して $\beta = (1+\delta)\tilde{\beta}$ とする (Interval)
5. $X_1 = -E + \beta I,\ X_2 = E + \beta I$ を計算する．I は単位行列 (Interval)
6. Cholesky 分解 $X_1 \approx \tilde{C}_1\tilde{C}_1^T,\ X_2 \approx \tilde{C}_2\tilde{C}_2^T$ を行う (Floating)
7. $\lambda_1 = \|X_1 - \tilde{C}_1\tilde{C}_1^T\|_2,\ \lambda_2 = \|X_2 - \tilde{C}_2\tilde{C}_2^T\|_2$ をノルムの定義から計算する (Interval)
8. $\gamma \leq \beta + \max(\lambda_1, \lambda_2)$ (Interval)

Theorem 3 一般化固有値問題の絶対値最大固有値 γ は，アルゴリズム RM の β,λ_1,λ_2 によって，

$$\gamma \leq \beta + \max(\lambda_1, \lambda_2)$$

で評価される．

Proof. A,B は区間行列だが，A はその中で対称なもの，B は対称で正定値なものだけを考える．

λ_1,λ_2 の定義より，$x^Tx = 1$ なる $\forall x \in R^n$ に対して，

$$\left|x^T(-E + \beta I - \tilde{C}_1\tilde{C}_1^T)x\right| \leq \lambda_1$$

$$\left|x^T(E + \beta I - \tilde{C}_2\tilde{C}_2^T)x\right| \leq \lambda_2$$

$\tilde{C}_1\tilde{C}_1^T$, $\tilde{C}_2\tilde{C}_2^T$ は正定値なので，

$$-\beta - \lambda_2 \leq x^T E x \leq \beta + \lambda_1$$

となる．よって，

$$\gamma \leq \beta + \max(\lambda_1, \lambda_2)$$

を得る． □

Rump の方法では近似対角化法と同じく，区間演算による Cholesky 分解を行うことによる区間拡大の恐れがある．だたし，これは通常の固有値問題の為のアルゴリズムを一般化固有値問題に適用したからであり，通常の固有値問題に適用するには優れたアルゴリズムである．

A が正定値の場合，アルゴリズム中の X_2 に関する手順は省略可能である．

3.5 一般化 Rump 法

一般化 Rump 法 (Generalized Rump's Method) は Rump の方法をもとに，区間演算による Cholesky 分解を回避した方法である．

アルゴリズム:GRM

1. Cholesky 分解 $B \approx \tilde{C}\tilde{C}^T$ を行う (Floating)
2. $\tilde{E} = \tilde{C}^{-1} A \tilde{C}^{-T}$ を計算する (Floating)
3. γ の近似 $\tilde{\beta}$ を計算する (Floating)
4. 適当に選んだ小さな $\delta > 0$ に対して $\beta = (1+\delta)\tilde{\beta}$ とする (Interval)
5. もしも，$X_1 = \beta B - A$, $X_2 = \beta B + A$ が正定値なら，$\gamma \leq \beta$ (確認には後述する正定値判定法を用いる)

Theorem 4 一般化固有値問題の絶対値最大固有値 γ は，アルゴリズム GRM の β によって，

$$\gamma \leq \beta$$

で評価される．

Proof. A,B は区間行列だが，A はその中で対称なもの，B は対称で正定値なものだけを考える．

X_1,X_2 は正定値であると仮定する．γ の定義より，

$$\beta - \gamma \geq \sup_{x \in R^n} \left| \frac{x^T(\beta B \mp A)x}{x^T B x} \right|$$

X_1,X_2,B は正定値なので，$\gamma \leq \beta$ を得る． □

一般化 Rump 法の特徴は計算コストに優れることである．正定値判定まで考慮に入れても他のものよりも優れている．ただしアルゴリズムの 4. での δ 及び，正定値判定の δ の 2 つのパラメータは慎重に選ぶ必要がある．

A が正定値の場合，Rump の方法と同じようにアルゴリズム中の X_2 に関する手順は省略可能である．

正定値判定法

アルゴリズム GRM で必要になる正定値判定法 (Verification of Positive Definitenes)([12]) を述べる．X を判定する行列とする．

アルゴリズム:**VPD**

1. X の最小固有値 $\tilde{\rho}$ を計算する (Floating)
2. 適当に選んだ $0 < \delta < 1$ に対して $\rho = (1-\delta)\tilde{\rho}$ を計算する (Interval)
3. $X - \rho I$ を計算する (Interval)
4. Cholesky 分解 $X - \rho I \approx \tilde{G}\tilde{G}^T$ を行う (Floating)
5. $\|\tilde{G}\tilde{G}^T - (X - \rho I)\|_2 \leq \epsilon$ をノルムの定義から計算する (Interval)
6. $\rho - \epsilon > 0$ なら正定値

Theorem 5 行列 X は，アルゴリズム VPD の ρ,ϵ が，

$$\rho - \epsilon > 0$$

を満たせば正定値である．

Proof. $\rho - \epsilon > 0$ と仮定．ϵ の定義より，$x^T x = 1$ なる $\forall x \in R^n$ に対して，

$$\left| x^T (\tilde{G}\tilde{G}^T - X + \rho I) x \right| \leq \epsilon$$

$\tilde{G}\tilde{G}^T$ は正定値なので，

$$x^T X x \geq \rho - \epsilon$$

仮定より X は正定値を得る． □

4 各手法の評価

3節で述べた各手法を比較評価する．用いるソフトウェア，評価の方法，結果について述べる．

4.1 精度保証演算ソフトウェア PROFIL

精度保証付きの演算である区間演算を行うため，PROFIL を用いる．これは PC やワークステーション上で使用可能な C++ の高速な区間演算ライブラリである．区間の四則演算及び，区間ベクトルや区間行列の演算，区間演算による連立方程式の解法などが使用可能である．性能評価等は [7] で為されている．

4.2 評価の方法

3節で述べた各手法を比較評価する為のテスト問題の生成方法について述べる．以下の手順で一般化固有値問題を作る．

行列の生成手順

1. $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$: n 個の固有値をランダムに定める
2. $v \in R^n$ をランダムに定める
3. $u \equiv \frac{v}{\|v\|_2}$ を計算する (Interval)
4. $M \equiv I - 2uu^T$ を計算する (Interval)
5. $Q \in R^{n \times n}$ をランダムな下三角行列に定める
6. $D \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とする
7. $A \equiv QM^T DMQ^T$, $B \equiv QQ^T$ を計算する (Interval)

Proposition 1 上の手順で生成された一般化固有値問題は，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を固有値に持つ．

Proof. 一般化固有値問題，

$$Ax = \lambda Bx$$

は，

$$QM^T DMQ^T x = \lambda QQ^T x$$

と書ける．左側から Q^{-1}，右側から Q^{-T} を掛けると，

$$M^T DM = \lambda x$$

となる．また M は直行行列なので，左側から M^{-T}，右側から M^{-1} を掛けると

$$Dx = \lambda x$$

となるからである． □

この方法の最大の利点は，問題をランダムに生成していながら，あらかじめ固有値を知ることの出来る点である．また，手順の 5. で Q を定めるとき対角成分と非対角成分の比を調整することで，B の優対角性の度合いを変えることが出来る．また，B の条件数を知ることも出来る．

4.3 数値実験と結果の考察

4.2の方法を用いて作ったテスト問題に各方法を適用した結果を，数値結果を交えて述べる．4.2の手順 5. の Q は，下三角部分の対角成分以外の要素は -1 ~ 1 のランダムな値とする．また固有値は -1 ~ 1 のランダムな値とする．(絶対値最大固有値は 1 に近い値になる)

計算には Fujitsu S1000-4/E， OS は Solaris2.4，処理系は gcc を用いた．

結果 1(Cholesky 分解の成否)

Q の対角成分を変化させ優対角性の度合いを変えたときの，区間演算による Cholesky 分解を行った場合の成否．優対角性の度合いによるアルゴリズムの利用範囲を調査する為に行った．$n = 100$．

Q の対角成分	成功回数 (10 回中)
1 ~ 2	0
2 ~ 3	0
2.5 ~ 3.5	10
3 ~ 4	10
4 ~ 5	10

考察

この結果から，優対角性の度合いがかなり弱い場合は，近似対角化法や Rump の方法は利用出来ない．

結果 2(絶対値最大固有値の精度保証付き計算 - 優対角性の度合い: 弱)

実行条件

- Q の対角成分は 3 ~ 4
- Rump の方法の $\delta = 10^{-7}$
- 一般化 Rump 法の $\delta = 10^{-3}$
- 正定値判定法の $\delta = 10^{-1}$
- $n = 100$

最大固有値	0.95086519974365	
二分法による近似計算	0.95086519974365	
		CPU time
近似対角化法	1.92719457771442	11sec
改良・近似対角化法	0.95086519979575	6sec
Rump の方法	1.35154194596465	8sec
一般化 Rump 法	0.95181606494339	3sec

考察

Q の対角要素が 1 ~ 2 や 2 ~ 3 程ではないが，優対角性の度合いが弱い場合．区間演算による Cholesky 分解の誤差の影響で，近似対角化法や Rump の方法は良い結果が得られない．このケースでは改良・近似対角化法が最も良い結果となった．

結果 3(絶対値最大固有値の精度保証付き計算 - 優対角性の度合い: 強)

実行条件

- Q の対角成分は 5 ~ 6
- Rump の方法の $\delta = 10^{-7}$
- 一般化 Rump 法の $\delta = 10^{-3}$
- 正定値判定法の $\delta = 10^{-1}$
- $n = 100$

最大固有値	0.99011200292978	
二分法による近似計算	0.99011200292978	
		CPU time
近似対角化法	0.99011932830084	11sec
改良・近似対角化法	0.99011200295754	7sec
Rump の方法	0.99012252273631	8sec
一般化 Rump 法	0.99110211493271	2sec

考察

Q の対角要素が 5 ~ 6 であるような優対角性の度合いが強い場合．どの手法も良い結果が得られた．Q の対角要素をこれ以上大きくした場合も同じ様な結果が得られた．

改良・近似対角化法が精度の上では最も良い値だが，一般化 Rump 法は計算コストの面で有利である．パラメータの設定次第では Rump の方法や一般化 Rump 法はもっと良い値が得られる可能性がある．

結果 4(絶対値最大固有値の精度保証付き計算 - 大規模行列)

実行条件

- Q の対角成分は 9 ~ 10
- 一般化 Rump 法の $\delta = 10^{-3}$
- 正定値判定法の $\delta = 10^{-1}$
- $n = 1000$

最大固有値	0.99960325937681	
二分法による近似計算	0.99960325937683	
		CPU time
一般化 Rump 法	1.00060286263621	3431sec

考察

大規模な行列の場合．一般化 Rump 法以外の方法は計算コストがかかり過ぎるので試みていない．この数値実験は現段階で計算コスト上の実用的な限界と考えられるものについての実行結果である．

5 Stokes 方程式の a priori 誤差評価への応用

4.3で最も良い結果となった一般化 Rump 法を，Stokes 方程式の a priori 誤差評価へ応用する．まず，Stokes 方程式の有限要素解に対する構成的 a priori 誤差評価が得られることを示し，数値結果を述べる．

5.1 introduction

次の同次境界条件を持つ Stokes 問題を考える:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad \operatorname{div} u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\quad u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の凸多角形，$u = (u_1, u_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$ は 2 次元ベクトル値関数, $\nu > 0$ である．$H^k(\Omega)$ を通常の k 次 Sobolev 空間とし，関数空間を以下で定義する．

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\equiv \{v \in H^1(\Omega)\ ;\ v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ L_0^2(\Omega) &\equiv \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ \int_\Omega v\,dx\,dy = 0\}, \\ \mathcal{S} &\equiv H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

さらに $(\,\cdot,\cdot\,)$ を Ω 上の L^2- 内積とし，norm を以下で定める．

$$
\begin{aligned}
|\cdot|_0 \quad &: \quad L^2(\Omega)\text{-norm}, \ |v|_0{}^2 = \int_\Omega v^2 \, dxdy. \\
|\cdot|_1 \quad &: \quad H_0^1(\Omega)\text{-seminorm}, \ |v|_1 = |\nabla v|_0.
\end{aligned}
$$

このとき，$\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ 上の bilinear form $\mathcal{L}$ を

$$
\mathcal{L}(\,[u,p],[v,q]\,) \equiv \nu(\,\nabla u, \nabla v\,) - (\,p, \mathrm{div}\, v\,) - (\,q, \mathrm{div}\, u\,) \qquad [u,p],\,[v,q] \in \mathcal{S}. \tag{4}
$$

で定義するとき，Stokes 方程式 (3) は次の同値な問題に置き換えられる：

$$
\begin{aligned}
&\text{find} \quad [u,p] \in \mathcal{S} \quad \text{such that} \\
&\mathcal{L}(\,[u,p],[v,q]\,) = (\,f, v\,) \qquad \forall [v,q] \in \mathcal{S}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

一般に，(5) は $\mathcal{S}$ 内に一意解を持つ．

また，[18] の議論から，任意の $[u,p] \in \mathcal{S}$ に対し

$$
\delta(u,p) \equiv \sup_{\substack{[v,q]\in\mathcal{S} \\ [v,q]\neq 0}} \frac{\mathcal{L}([u,p],[v,q])}{|v|_1 + |q|_0}
$$

とおくとき，次の評価が成り立つ：

$$
\begin{cases}
|u|_1 \le \left(\dfrac{1}{\nu^2} + \dfrac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta(u,p), \\
|p|_0 \le \left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{\nu}{\beta^2} \right) \delta(u,p).
\end{cases} \tag{6}
$$

ここで，$\beta > 0$ は領域 Ω にのみ依存する定数であり，数値的に算定可能であるとする．実際，Ω が正方領域の場合は $1/\beta < 2.614$，また，正 n 角形のときは $\dfrac{1}{\beta} = \sqrt{\dfrac{2}{1-\sin(\pi/n)}}$ となる (cf. [6]).

5.2 有限要素解と a priori 誤差評価

(5) の有限要素近似解に対し，(6) の評価を用いた真の解と離散解との定量的 a priori な誤差評価を導く．まず，有限要素近似空間を設定する．

$\mathcal{T}_h$ を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の三角形または四角形分割，h を $\mathcal{T}_h$ の scale parameter とする．$h > 0$ は領域の分割幅を通常表す．次に，$X_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を速度場 u の各成分を近似する有限要素部分空間，$Y_h \subset L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を圧力場 p を近似する有限要素部分空間とする．

続いて，無限次元空間から有限次元空間への projection を定義する．P_0 は $L^2(\Omega)$ から X_h への L^2-projection，P_1 を $H_0^1(\Omega)$ から X_h への $H_0^1(\Omega)$-projection とする．

(5) の離散解は次で与える：

$$\begin{aligned} &\text{find } \ [u_h, p_h] \in X_h^2 \times Y_h \ \text{ such that} \\ &\mathcal{L}(\,[u_h, p_h], [v_h, q_h]\,) = (\,f, v_h\,) \qquad \forall [v_h, q_h] \in X_h^2 \times Y_h. \end{aligned} \tag{7}$$

また，X_h の近似性として次を仮定する：

$$\inf_{\xi \in X_h} |v - \xi|_1 \le C_0 h |v|_2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{8}$$

ただし，C_0 は数値的に算定可能な正定数，$|\cdot|$ は Ω 上の H^2-seminorm とする．仮定 (8) は，一般の有限要素空間で成立することが知られている．また，C_0 が数値的に決められるような X_h の例は多い．例えば，1 次元の区分 1 次要素の空間では $C_0 = 1/\pi$ となる ([13])．また，1 次元の区分 2 次要素のテンソル積として定義される 2 次元矩形要素では，一様メッシュの場合 $C_0 = 1/(2\pi)$ となり ([9])，また，三角形一様分割の区分 1 次要素では $C_0 \le 0.81$ となることがいえる．

(8) から，projection の性質と Aubin-Nitsche's trick を用いると，$\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $v_h = P_1 v$ とおくと，以下の不等式が成立する：

$$|v - v_h|_0 \le C_0 h |v|_1. \tag{9}$$

ここで，(5) の解 $[u, p]$ と (7) の有限要素解 $[u_h, p_h]$ の誤差を

$$\begin{cases} e_h \equiv u - u_h \\ \varepsilon_h \equiv p - p_h \end{cases}$$

とおくと，

$$\mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) = \nu(\,\nabla(u - u_h), \nabla(v - \xi_h)\,) - (\,p - p_h, \operatorname{div}(v - \xi_h)\,) + (\,q, \operatorname{div} u_h\,)$$

が各 $[v, q] \in \mathcal{S}$, $\xi_h \in X_h^2$ について成立する．ここで，ξ_h を $v = (v_1, v_2)^T$ の各成分の H_0^1-projection として

$$v_h = (P_1 v_1, P_1 v_2)^T$$

とおけば，H_0^1-projection の性質より

$$\mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) = \nu(\,\nabla u, \nabla(v - v_h)\,) - (\,p - p_h, \operatorname{div}(v - v_h)\,) + (\,q, \operatorname{div} u_h\,)$$

が成り立つ．従って，Green の公式，Schwarz の不等式，(9) より，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) &= (\,f - \nabla p_h, v - v_h\,) - (\,q, \operatorname{div} u_h\,) \\ &\le |f - \nabla p_h|_0 \, C_0 h \, |v|_1 + |q|_0 \, |\operatorname{div} u_h|_0 \\ &\le (\,C_0 h |f - \nabla p_h|_0 + |\operatorname{div} u_h|_0\,)(|v|_1 + |q|_0) \end{aligned}$$

を得る．以上より，次の lemma が成立する．

Lemma 1 $0 \neq \forall [v, q] \in \mathcal{S}$,

$$\frac{\mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q])}{|v|_1 + |q|_0} \leq C_0 h |f - \nabla p_h|_0 + |\mathrm{div}\, u_h|_0.$$

次に，$f \in L^2(\Omega)^2$ に対し，$P_0 f \in X_h^2$ を成分毎の L^2-projection として

$$P_0 f = (P_0 f_1, P_0 f_2)^T$$

で定義する．このとき，L^2-projection の性質から

$$|f - P_0 f|_0{}^2 = |f|_0{}^2 - |P_0 f|_0{}^2, \tag{10}$$

が成り立つことから，ある $0 \leq \theta \leq \pi/2$ を用いることで，$|P_0 f|_0$ と $|f - P_0 f|_0$ は

$$\begin{cases} |P_0 f|_0 = |f|_0 \sin\theta, \\ |f - P_0 f|_0 = |f|_0 \cos\theta. \end{cases} \tag{11}$$

と書ける．

次に，定数 K_1, K_2 が f に依らずに決まり，

$$|\mathrm{div}\, u_h|_0 \leq K_1 |P_0 f|_0, \tag{12}$$

$$|-\nabla p_h + P_0 f|_0 \leq K_2 |P_0 f|_0. \tag{13}$$

を満たすと仮定する．具体的な K_1, K_2 の構成方法は小節 5.3で考察する．このとき，Stokes 方程式に対する a priori 評価が以下のように成り立つ．

Theorem 6 (a priori error estimate) $\forall f \in L^2(\Omega)^2$,

$$\begin{cases} |u - u_h|_1 \leq \left(\dfrac{1}{\nu^2} + \dfrac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} C(h)\, |f|_0, \\ |p - p_h|_0 \leq \left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{\nu}{\beta^2} \right) C(h)\, |f|_0, \end{cases} \tag{14}$$

where

$$C(h) \equiv \sqrt{(C_0 h K_2 + K_1)^2 + (C_0 h)^2}. \tag{15}$$

証明は ([11]) ．

5.3 定数 K_1, K_2 の評価

(12), (13) を満足する定数 K_1, K_2 の評価方法を述べる．これらの定数が数値的に評価可能であれば，(15) によって $C(h)$ が求まり，定量的な a priori 誤差評価が可能となる．

まず，有限要素空間 $X_h,\ Y_h$ の次元をそれぞれ $n,\ m$ とし，基底をそれぞれ $\{\phi_j\}_{1\le j\le n}$, $\{\psi_j\}_{1\le j\le m}$ で定義する．このとき，実係数 $\{a_j^{(1)}\}_{1\le j\le n},\ \{a_j^{(2)}\}_{1\le j\le n}$ および $\{b_j\}_{1\le j\le m}$ によって，有限要素近似解 $u_h=(u_h^{(1)},u_h^{(2)})^T\in X_h^2,\ p_h\in Y_h$ は

$$
\begin{aligned}
u_h^{(1)} &= \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}\phi_i,\\
u_h^{(2)} &= \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)}\phi_i,\\
p_h &= \sum_{i=1}^{m} b_i\psi_i.
\end{aligned}
$$

と一意に表現される．従って，(7) は

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}(\,\nabla\phi_i,\nabla\phi_j\,)-\sum_{i=1}^{n} b_i(\,\psi_i,\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\,) &=& (\,f_1,\phi_j\,) & 1\le j\le n,\\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)}(\,\nabla\phi_i,\nabla\phi_j\,)-\sum_{i=1}^{n} b_i(\,\psi_i,\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\,) &=& (\,f_2,\phi_j\,) & 1\le j\le n,\\
-\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i^{(1)}(\,\psi_j,\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\,)-\sum_{i=1}^{m} a_i^{(2)}(\,\psi_j,\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\,) &=& 0 & 1\le j\le m.
\end{array}
\right. \tag{16}
$$

を満たす $\{a_j^{(1)}\},\ \{a_j^{(2)}\},\ \{b_j\}$ を求めることと同値となる．

ここで，ベクトルを以下で定義する：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (a_1^{(1)},a_2^{(1)},\ldots,a_n^{(1)})_{1\times n},\\
\mathbf{a}_2 &= (a_1^{(2)},a_2^{(2)},\ldots,a_n^{(2)})_{1\times n},\\
\mathbf{a} &= (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)_{1\times 2n},\\
\mathbf{b} &= (b_1,b_2,\ldots,b_m)_{1\times m},\\
\mathbf{f}_1 &= (\,(\,f^{(1)},\phi_1\,),(\,f^{(1)},\phi_2\,),\ldots,(\,f^{(1)},\phi_n\,)\,)^T_{n\times 1},\\
\mathbf{f}_2 &= (\,(\,f^{(2)},\phi_1\,),(\,f^{(2)},\phi_2\,),\ldots,(\,f^{(2)},\phi_n\,)\,)^T_{n\times 1},\\
\mathbf{f} &= \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\end{pmatrix}_{2n\times 1}.
\end{aligned}
$$

さらに，行列を以下で定義する：

$$
\begin{aligned}
(D_0)_{ij} &= (\,\nabla\phi_i,\nabla\phi_j\,)_{n\times n},\\
D &= \begin{pmatrix} D_0 & 0\\ 0 & D_0\end{pmatrix}_{2n\times 2n},\\
(E_x)_{ij} &= (\,\psi_i,\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\,)=-(\,\frac{\partial\psi_i}{\partial x},\phi_j\,)_{m\times n},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(E_y)_{ij} &= (\,\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\,) = -(\,\frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \phi_j\,)_{m\times n}, \\
E &= (E_x \;\; E_y)_{m\times 2n}, \\
G &= \begin{pmatrix} D & -E^T \\ -E & 0 \end{pmatrix}_{(2n+m)\times(2n+m)}.
\end{aligned}
$$

以上の定義により，(16) は連立 1 次方程式

$$
G \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17}
$$

に帰着される．さらに，G の可逆性を仮定し，逆行列 G^{-1} を

$$
G^{-1} = \begin{pmatrix} G_a & G_b^T \\ G_b & G_* \end{pmatrix}_{(2n+m)\times(2n+m)},
$$

の形に分解する．G_a, G_b および G_* はそれぞれ $2n \times 2n$, $m \times 2n$, $m \times m$ 行列として定義される．従って，与えらえた $f \in L^2(\Omega)^2$ に対し，(7) を満たす有限要素解 $[u_h, p_h] \in X_h^2 \times Y_h$ は，次の演算で与えられる：

$$
\begin{cases} \mathbf{a}^T = G_a\,\mathbf{f}, \\ \mathbf{b}^T = G_b\,\mathbf{f}. \end{cases} \tag{18}
$$

次に，各 L^2-norm $|P_0 f|_0$, $|\mathrm{div}\, u_h|_0$, $|-\nabla p_h + P_0 f|_0$ を行列の 2 次形式で表現することで，K_1, K_2 の評価式を求める．

Lemma 2 $n \times n$ 行列 L および $2n \times 2n$ 行列 F を

$$
\begin{aligned}
(L)_{ij} &= (\,\phi_i, \phi_j\,)_{n\times n}, \\
F &= \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}.
\end{aligned}
$$

で定義する．このとき，$|P_0 f|_0{}^2$ は

$$
|P_0 f|_0{}^2 = \mathbf{f}^T F \mathbf{f} \tag{19}
$$

と表現される．

証明は ([11]) ．

次に，$n \times n$ 行列 D^{xx}, D^{xy}, D^{yy} を

$$
\begin{aligned}
(D^{xx})_{ij} &= \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right)_{n \times n}, \\
(D^{xy})_{ij} &= \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right)_{n \times n}, \\
(D^{yy})_{ij} &= \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right)_{n \times n}.
\end{aligned}
$$

で，さらに $2n \times 2n$ 行列 Q_1 を

$$
Q_1 = \begin{pmatrix} D^{xx} & D^{xy} \\ (D^{xy})^T & D^{yy} \end{pmatrix}_{2n \times 2n}.
$$

で定義する．このとき，次が成り立つ．

Lemma 3 $2n \times 2n$ 行列 A_1 を

$$
A_1 = (\, G_a Q_1 G_a \,)_{2n \times 2n}.
$$

で定める．このとき K_1 は行列 A_1, F に対し，次で評価される

$$
K_1 \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T F \mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}
$$

証明は ([11]) ．

次に，$m \times m$ 行列 $\tilde{D}$ を

$$
(\tilde{D})_{ij} = (\, \nabla \psi_i, \nabla \psi_j \,)_{m \times m}
$$

とするとき，K_2 について次の lemma が成り立つ．

Lemma 4 $2n \times 2n$ 行列 A_2 を

$$
A_2 = (\, G_b^T E F + (G_b^T E F)^T + G_b^T \tilde{D} G_b + F \,)_{2n \times 2n}.
$$

で定義する．このとき K_2 は行列 A_2, F に対し，次で評価される

$$
K_2 \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\mathbf{x}^T A_2 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T F \mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{21}
$$

証明は ([11]) ．

(20), (21) の評価は，A を対称行列，B を対称で正定値な行列とするときの一般化固有値問題

$$
Ax = \lambda B x
$$

の最大固有値を求める問題に帰着することができる．

5.4 数値結果

(20), (21) 式より，K_1,K_2 を一般化 Rump 法で評価する．

実行条件

- $\Omega = (0,1) \times (0,1)$
- 区間を $(0,1)$ とし，L を分割数とする．i.e. $h = 1/L$
- X_h : 連続な区分二次多項式，Y_h : 区分一次多項式
- $\nu = 1$, $C_0 = 1/(2\pi)$ and $1/\beta^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.
- 一般化 Rump 法のパラメータ $\delta = 10^{-3}$
- 正定値判定法のパラメータ $\delta = 10^{-1}$

L	K_1	K_2	$C(h)$	行列の次元
5	0.051035	1.268929	0.0968082	162×162
(floating)	(0.051008)†	(1.268295)	(0.0967652)	
10	0.027955	1.238731	0.0502564	722×722
(floating)	(0.027941)	(1.238111)	(0.0502339)	

†(floating) は FUJITSU VP2600/10 上で倍精度浮動小数点演算により二分法で近似計算したもの

6 結論と今後の課題

精度保証付き固有値問題の解法について，既存の 2 つの方法を改良して新たに 2 つの方法を開発し，それらを比較評価した．

4.3で見たように計算コストの面では一般化 Rump 法の優位性は明らかである．また十分な精度も持っており，4 つの解法の中では最も優れていると言える．

今後の課題としては，

1. 広範囲な有限要素法の a posteriori 及び，構成的 a priori 誤差評価への適用
2. 汎用性のあるプログラムライブラリの作成
3. 計算の並列化及び，区間演算の特性を考慮したアルゴリズムの改良
4. 一般化 Rump 法のパラメータ設定法

などがある．1. は一般化固有値問題に帰着できる部分を持つので，これを一般化 Rump 法を用いて計算する．2. はスーパーコンピュータ上での計算を可能にするため，例えば Fortran 90 を用いて実現するなどのことが考えられる．3. は計算量や使用メモリを減らして計算の効率を上げ，大規模計算へ対応するための改良である．4. は一般化 Rump 法や正定値判定法における最適なパラメータの設定方法を検討する．

謝辞

ご指導下さった中尾充宏教授、アドバイスをいただいた山本野人講師、渡部善隆氏、それから両親に感謝します。

参考文献

[1] Arnold Neumaier: *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

[2] Bank, R. E., Welfert, B. D. : A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**, 591–623 (1991).

[3] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan: *MATRIX COMPUTATIONS*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, (1983).

[4] Girault, V., Raviart, P. A. : *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Series in Computational Mathematics. Berlin Heidelberg New York : Springer (1986).

[5] Grisvard, P. : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985).

[6] Horgan, C. O., Payne, L. E. : On Inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, 165–179 (1983).

[7] Knüppel, O. : *PROFIL/BIAS - A Fast Interval Library*, COMPUTING, Vol. 53, (1994), p. 277-287.

[8] Nakao, M. T. : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems, *Japan J. Appl. Math.*, **5**, 313–332 (1988).

[9] Nakao, M.T., Yamamoto, N, & Kimura, S. : On best constant in the optimal error estimates for the H_0^1-projection into piecewise polynomial spaces, Preprint Series in Graduate School of Mathmatics, Kyushu University, Kyushu-MPS-1996-21 (1996), to appear in J. Approximation Theory.

[10] 中尾 充宏, 山本 野人 : A priori 誤差評価定数の計算機による数値評価について, 科学技術における数値計算の理論と応用 II, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.990 (1997) pp.224–234.

[11] 中尾 充宏, 山本 野人, 渡部 善隆 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a priori 誤差評価, 科学技術における数値計算の理論と応用, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.944 (1996) pp.41–49.

[12] S. M. Rump: *Verification methods for dense and sparse systems of equations*, in Topics in Validated Computations, Herzberger, J.(ed.), North-Holland, Amsterdam (1994), 63-136

[13] Schultz, M. H. : *Spline Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jergey (1973).

[14] 戸川 隼人 : 数値計算, 情報処理入門コース 7, 岩波書店 (1991).

[15] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations, *Numer. Math.*, **55**, 309–325 (1989).

[16] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations II nonconforming discretizations, *Numer. Math.*, **60**, 235–249 (1991).

[17] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimates for Nonlinear Problems. Finite Element Discretizations of Elliptic Equations, *Math. Comp.*, **62**, 445–475 (1994).

[18] 渡部 善隆, 山本 野人, 中尾 充宏 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価, 短期共同研究・数値計算における品質保証とその応用 – 感度解析から証明まで –, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.928 (1995) pp.20–31.

[19] Yamamoto, N., Nakao, M. T. : Numerical Verifications of Solutions for Elliptic Equations in Nonconvex Polygonal Domains, *Numer. Math.*, **65**, 503–521 (1993).