# 非線形楕円型境界値問題の解に対する精度保証付き数値計算法

# Numerical Verification Methods for the Existence of Solutions for Nonlinear Elliptic Problem

渡部 善隆 †　　中尾 充宏 ‡

Yoshitaka Watanabe　　Mitsuhiro T.Nakao

†九州大学大型計算機センター
Computer Center,
Kyushu University

‡九州大学理学部
Department of Mathematics,
Kyushu University

要 旨　数理科学上様々な形で現われる微分方程式について，その解を計算機を用いて数値的に捉えようという試みは従来からなされてきた．最近では精度保証つき数値計算法と呼ばれる，解の存在あるいは局所一意性までをある領域内で保証するというアルゴリズムが提案され，新しい数値計算法として注目されている．本稿では非線形楕円型境界値問題の精度保証付き計算法と数値計算アルゴリズムを計算機による解の検証という立場から定式化し，検証のプロセスをいくつかの数値例に沿って述べる．

**Abstract**　A numerical technique which enables us to verify the existence of weak solutions for nonlinear elliptic boundary value problems is proposed. It is based on the infinite dimensional fixed point theorems using the Newton-like operator and the error estimates for finite element approximations. We also present an effective verification procedure which automatically generates the set including the exact solution in a computer. Some numerical examples are illustrated.

## 1　はじめに

精度保証つき数値計算法とは，様々な形で現われる数理科学上の問題に対し，問題の解自身を数学的な存在証明および存在領域の保証付きで求める数値計算アルゴリズムである．非線形連立方程式や微分方程式の解に対する精度保証付き存在検証は，計算機を用いて問題の解の存在を誤差評価を込めて行うことで，仮に解析的な解の存在が証明されていない問題に対し検証が行われた場合，計算機が厳密に数学的意味で解析的結果を導くという，極めて意義深い結果を得る．また，元々の自然現象をモデル化して，数値シミュレーションを行う立場から見れば，数学モデルとして立てられた無限次元の問題を計算機によって離散化して得られた数値モデルとしての近似解が，どれだけ数学的モデルの真の解に対して精度よく近似できているかを計ることで，数値シミュレーションの妥当性を知ることができ，併せて解の存在領域を把握することができる．

このように精度保証つき数値計算法は，立てられた数学モデルに対し，何らかの方法で計算機により求められた近似解に不可避的に混入する離散化誤差，数値計算誤差を数学的に厳密に把握する手法である．

微分方程式について，解の存在，あるいは局所一意性までをある領域内で保証するというアルゴリズムは，近年になって区間解析法にもとづくアプローチを取り入れることにより，急速な発展を遂げた．これは，不動点定理をもとにして計算機により自動的に解をある領域に包み込むという方法であり，特に常微分方程式については，高い精度で効率よく検証が可能なアルゴリズムが数多く提案され，既に実用段階に達したと言える．

本稿では [11] で定式化された非線形楕円型境界値問題に対する精度保証付き計算法と数値計算アルゴリズムを，計算機による解の検証という立場から定式化し，検証のプロセスをいくつかの数値例に沿って述べる．また，[11] の定式化の拡張として，微分不可能な項を含む問題に対する検証例にも言及する．

## 2　数学モデルの定式化

次の 2 階非線形楕円型境界値問題を考える．

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u), & \text{in} \quad \Omega. \\ u & = & 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

$\Omega$ は $\mathbf{R}^n (1 \leq n \leq 3)$ の有界凸領域，$\partial\Omega$ は区分的に滑らかな $\Omega$ の境界, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$, $f(t)$ は非線形実数値関数とする．

まず，(1) を超関数理論に基づく適切な関数空間内の定式化に変換する．$H^m(\Omega)$ を $\Omega$ 上の $m$ 次 $L^2$–Sobolev 空間とする．従って $H^m(\Omega)$ の任意の元は，$m$ 階までの導関数が 2 乗可積分関数となる．更に $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とする．$H_0^1(\Omega)$ の内積は $( u , v )_{H_0^1(\Omega)} \equiv (\nabla u , \nabla v)$ で定義する．ただし $( \cdot , \cdot )$ は $L^2(\Omega)$ 内積として $(\phi(x), \psi(x)) = \int_\Omega \phi(x)\psi(x)dx$ を意味する．$\nabla u = ( \frac{\partial u}{\partial x_1}, ...., \frac{\partial u}{\partial x_n} )$ とおき，(1) を次の問題に変形する．

$$\begin{array}{l} \text{find} \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad \text{s.t.} \\ ( \nabla u , \nabla v ) = \lambda( f(u) , v ), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \tag{2}$$

(2) の解を (1) に対する弱解 (weak solution)，(2) を弱形式 (weak form) と呼ぶ．以下，(2) の解を不動点問題に帰着させ，検証を行う．

まず，実数値関数 $f(t)$ に対し，次の性質を仮定する．

**仮定 1**　対応 $u \to f(u)$ は $H_0^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への連続写像．

**仮定 2**　$U$ が $H_0^1(\Omega)$ の有界集合のとき $f(U)$ は $L^2(\Omega)$ で有界．

次に $\psi \in L^2(\Omega)$ に対し，境界値問題

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \phi & = & \psi, & \text{in} \quad \Omega. \\ \phi & = & 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3}$$

は一意の解 $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を持ち，次の評価が成り立つことがよく知られている．

$$| \phi |_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \| \psi \|_{L^2(\Omega).} \tag{4}$$

ただし，$C_1$ は $\psi$ に依らない正の定数，$| \cdot |_{H^2(\Omega)}$ は $H^2(\Omega)$–seminorm ; $|u|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{n} || \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} ||_{L^2(\Omega)}$ である．ここで，$\psi \in L^2(\Omega)$ に対して，作用素 $G$ を $G\psi$ が (3) の解となるものとして定義する．このとき $G$ は $L^2(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ への isomorphism，かつ埋め込み $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ が compact であることより，$G$ は $L^2(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への compact 作用素である．従って仮定 1，仮定 2 より非線形作用素 $F \equiv Gf$ は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への compact 作用素として定義される．この時，弱形式 (2) は不動点形式 $u = Fu$ と同値である．

次にいくつかの仮定のもと，$F$ についての不動点問題と同値になる Newton-like method を導入する．$S_h$ を パラメータ $h$ ( $0 < h < 1$ ) に依存する $H_0^1(\Omega)$ の有限要素部分空間とする．通常添字 $h$ は領域の分割幅を表わす．また $P_h$ を次式で定まる $H_0^1(\Omega)$ から $S_h$ への $H_0^1(\Omega)$ の意味での直交射影 ( $H_0^1-$projection) とする．

$$( \nabla(u - P_h u) , \nabla v ) = 0, \qquad \forall v \in S_h. \tag{5}$$

$F$ の Fréchet 微分を $F'$, $u_h \in S_h$ を (2) の何らかの方法で求めた近似解とし，次を仮定する．

**仮定 3**　写像 $P_h(I - F'(u_h)) : H_0^1(\Omega) \to S_h$ を $S_h$ に制限したものは逆作用素 $[I - F'(u_h)]_h^{-1} : S_h \to S_h$ を持つ．ただし $I$ は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への恒等写像とする．

$\varepsilon$ を $0 < \varepsilon < 1$ なる微小なパラメータとし，非線形作用素 $T_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ を次式で定義する．

$$T_\varepsilon u \equiv \{I - ([I - F'(u_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)(I - F)\} u \tag{6}$$

この時 $[ I - F'(u_h) ]_h^{-1} P_h + \varepsilon I$ が逆作用素を持てば，二つの不動点問題 $u = Fu$ と $u = T_\varepsilon u$ は同値である．

(6) で定義した作用素 $T_\varepsilon$ は簡単な変形より condensing operator であることがわかる．従って，仮定 3 のもとで $H_0^1(\Omega)$ の空でない有界凸閉集合 $U$ に対し $T_\varepsilon U \subset U$ が成立すれば，Sadovskii の不動点定理 [10] によって $U$ の中に $T$ の不動点が存在することがわかる．更に $[I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon I$ が可逆ならば，この不動点は $F$ の不動点即ち (2) の解となる．

以下は Sadovskii の不動点定理の仮定を満たすような $H_0^1(\Omega)$ の部分集合 $U$ を計算機上で実現するための方法について述べる．

## 3　計算機による検証

(6) で定義された $T_\varepsilon$ は，無限次元空間 $H_0^1(\Omega)$ から同じ $H_0^1(\Omega)$ への作用素である．従って計算機内で直接 $U, T_\varepsilon U \subset H_0^1(\Omega)$ を求めることは不可能である．$H_0^1(\Omega)$ の要素と方程式を計算機内で取り扱うため，[9] に従い rounding 及び rounding error の概念を導入し，それに基づく検証手順について述べる．

無限次元空間の元 $u \in H_0^1(\Omega)$ を，先に導入した有限要素空間 $S_h$ で近似することを rounding（丸め込み）と呼ぶ．$u$ の $S_h$ での近似は，(5) で定義した

$H_0^1$–projection $P_h u$ で行なう．$Tu \in H_0^1(\Omega)$ に対する rounding $\tilde{T}_\varepsilon u \equiv P_h T_\varepsilon u$ は $\tilde{I} = P_h I$ , $\tilde{F} = P_h F$ に対し，

$$\tilde{T}_\varepsilon u \equiv \{\tilde{I} - ([I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon\tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F})\}u$$

の形をとる．また，集合 $T_\varepsilon U$ に対する rounding は次で定める．

$$R(T_\varepsilon U) \equiv \{v \in S_h \mid v = \tilde{T}_\varepsilon u,\ \ u \in U\}$$

rounding によって $S_h$ の元に丸め込まれた $P_h u$ と，元の $H_0^1(\Omega)$ の要素 $u$ との誤差評価のことを rounding error と呼ぶ．$S_h$ の近似性として，$P_h u$ に対し次の評価を仮定する．

**仮定 4**　$\forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ に対し，

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 h |u|_{H^2(\Omega)}. \tag{7}$$

ただし $C_2$ は $u$ と $h$ に依らない正の定数とする．

実際 (7) は，$C_2$ の数値的決定性をも含めて，多くの有限要素空間で成り立つことが知られている（例えば [2]）．集合 $T_\varepsilon U$ についての rounding error は次で定義する．

$$RE(T_\varepsilon U) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \phi \in H_0^1(\Omega) & \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha, \\ & \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\alpha \end{array} \right\}, \tag{8}$$

$$\text{where} \qquad \alpha \equiv \sup_{u \in U} \|T_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{9}$$

$$C \equiv C_1 C_2. \tag{10}$$

この時，次の補題が成り立つ（証明は [9]）．

**補題 1**　$U \subset H_0^1(\Omega)$ を空でない有界凸閉集合とする．ある $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ に対して

$$R(T_\varepsilon U) \ \oplus \ RE(T_\varepsilon U) \ \overset{\circ}{\subset} \ U \tag{11}$$

が成立すれば，$u = Fu$ の解が $U$ の中に存在する．但し $\oplus$ は $H_0^1(\Omega)$ の部分集合としての直交性を，$M_1 \overset{\circ}{\subset} M_2$ は $\overline{M_1} \subset \overset{\circ}{M_2}$ を意味する．

続いて，検証条件 (11) をみたす集合 $U$ を計算機内で生成するためのアルゴリズムを与える．有限要素空間 $S_h$ の次元を $M$ として，基底を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ とする．$\Theta_h$ を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ と区間係数との一次結合全体とする．このとき $\Theta_h$ の各要素は $S_h$ の部分集合として定義される．つまり $\omega \in \Theta_h$ は

$$\omega = \sum_{j=1}^M A_j \phi_j \equiv \{ \sum_{j=1}^M a_j \phi_j \mid a_j \in A_j \}$$

を意味する．ただし $A_j$ は実数の区間を表わす．次に $\mathbf{R}^+$ を非負実数の集合 とおき，$\alpha \in \mathbf{R}^+$ に対して，

$$[\alpha] \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \phi \in H_0^1(\Omega) & \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha, \\ & \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\alpha \end{array} \right\}, \tag{12}$$

なる集合を導入する．これは，前節で導入した rounding error に対応するものである．$u_h \in S_h$ を (2) の近似解，$\delta$ を正の定数，$\alpha_0 \in \mathbf{R}^+$ を初期誤差とする．さらに $\delta u_h^0 \in \Theta_h$ を適当に決める．以上の初期要素に対し，以下の反復法を定義する．

$n \geq 1$ に対し，$\delta u_h^{n-1}$, $[\alpha_{n-1}]$ は既知とする．この時，$\delta$ に対して，次を定義する．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta\tilde{u}_h^{n-1} & \equiv & \delta u_h^{n-1} + \sum_{j=1}^M [\,-1, 1\,]\,\delta\,\phi_j, \\ \tilde{\alpha}_{n-1} & \equiv & \alpha_{n-1} + \delta. \end{array} \right. \tag{13}$$

(13) は区間及び誤差を拡大させたものであり，$\delta$–inflation と呼ばれる．$\delta$–inflation された集合を改めて $\delta u_h^{n-1}, \alpha_{n-1}$ とおき，$U^{n-1} = u_h + \delta u_h^{n-1} + [\alpha_{n-1}]$ に対して次のステップ $\delta u_h^n, \alpha_n$ を以下で与える．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta u_h^n & \equiv & \tilde{T}_\varepsilon U^{n-1} - u_h, \\ \alpha_n & \equiv & Ch\lambda \sup_{u \in U^{n-1}} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right. \tag{14}$$

この時，補題 1 を用いて次の定理 [9] が成立する．

**定理 1**　ある $n \geq 1$ に対して

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta u_h^n & \overset{\circ}{\subset} & \delta u_h^{n-1}, \\ \alpha_n & < & \alpha_{n-1} \end{array} \right. \tag{15}$$

が成立すれば $U^n = u_h + \delta u_h^n + [\alpha_n]$ の中に (2) の解 $u$ が存在する．ここで (15) の第一式は各係数区間の包含関係として考える．つまり，$\delta u_h^{n-1} = \sum_{j=1}^M A_j \phi_j$ , $\delta u_h^n = \sum_{j=1}^M B_j \phi_j$ とおく時，(15) の第一式は $B_j \overset{\circ}{\subset} A_j$ $(j = 1, \cdots, M)$ を意味する．

## 4　プログラムの構成

(14) で定義される反復列の行列とベクトルを用いた具体的な $\delta u_h^n$ の計算法の概略は以下の通りである（詳細は [11] 参照）．各 $1 \leq i, j \leq M$ について，

$$u_h = \sum_{j=1}^M b_j \phi_j,$$

$$\tilde{F} u_h = \sum_{j=1}^M c_j \phi_j,$$

$$g_{ji} = (\,\nabla[I - F'(u_h)]_h \phi_j, \nabla\phi_i\,),$$

$$d_{ji} = (\nabla\phi_j, \nabla\phi_i).$$

とおき，それぞれ $g_{ji}$ , $d_{ji}$ を成分とする $M \times M$ 行列を $G$ , $D$ と記述する．仮定 1 より $G$ は逆行列を持つ．また 有限要素空間 $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ の性質より， $D$ も逆行列を持つとしてよい ( 例えば [1] による ) ．

更に，

$$\delta u_h^{n-1} = \sum_{j=1}^{M} A_j^{n-1}\phi_j,$$

$$K_i^{n-1} = \lambda(f(U^{n-1}) - f(u_h) - f'(u_h)\delta u_h^{n-1}, \phi_i),$$

とする． $A_j^{n-1}, K_j^{n-1}$ は区間係数を表す．また， $K_j^{n-1}$ は実際の計算では無限次元の計算を含むため， $\Theta_h$ の元として右辺を包み込むように決定される． $E$ を単位行列， $G^{-1}$ を $G$ の逆行列， $(a_i)$, $(K_j^{n-1})$ 等は各成分を並べたベクトルを表わすとすれば，行列とベクトルを用いて，

$$(a_j) = (G^{-1}D + \varepsilon E)(c_i - b_i)$$

$$(B_j^n) = -\varepsilon D^{-1}G(A_i^{n-1}) + (G^{-1} + \varepsilon D^{-1})(K_i^{n-1})$$

に対し， $\delta u_h^n$ は $\sum_{j=1}^{M}(a_j + B_j^n)\phi_j$ として計算機内で決定される．

## 5 検証例

### 5.1 領域と有限要素空間の設定

これまでに述べた定式化，プログラムの構成に従い，具体的な検証例を述べる．まず領域 $\Omega$ を与え，有限要素空間を設定する．

$\Omega$ を $(0,1)\times(0,1)$ の 2 次元矩形領域とする．有限要素空間 $S_h$ は以下のように定める．まず，区間 $(0,1)$ を $N$ 等分し， $x_i = i/N$, $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, 2, ...., N)$, $h = 1/N$ とおく． $I_i$ 上一次となる多項式の集合を $P_1(I_i)$ とおき，有限要素空間 $\mathcal{M}_0^1(x)$ を次で定義する．

$$\mathcal{M}_0^1(x) \equiv \left\{ \begin{array}{lll} v \in C(0,1) & | & v|_{I_i} \in P_1(I_i) \\ & & v(0) = v(1) = 0 \end{array} \right\}. \quad (16)$$

$\mathcal{M}_0^1(x)$ の基底として，次の hat function を用いる．

$$\phi_j(x_k) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (k = j), \\ & \\ 0 & (k \neq j), \end{array} \right. \qquad 1 \leq j, k \leq N-1 .$$

$y$ 方向にも同様の分割を施し， $\mathcal{M}_0^1(y)$ を定義する．ここで $H_0^1(\Omega)$ の有限要素空間は $S_h \equiv \mathcal{M}_0^1(x) \otimes \mathcal{M}_0^1(y)$ で定義する．また，定数 $C$ は $1/\pi$ とできることが解っている ( [8] ) ．

### 5.2 Reaction - Diffusion Equation

次の問題を考える．

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda u(u-a)(1-u), & \text{in } \Omega. \\ u & = & 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (17)$$

(17) は化学・生物学上の現象を記述するモデルである反応拡散方程式 (reaction-diffusion equation) の定常問題を表す． $\lambda, a$ はパラメータとして実数値をとる．

初期値 $u_h$ を得るためには次の方法を用いる．先ず [3] の手順に従って得られた 1 階の固有値展開から出発し，常に $\alpha_n = 0$ として反復を行なう．そして，係数がスカラーとして得られる $\delta u_h^n = \sum_{j=1}^{M} a_j^n \phi_j$ に対し， $\max_{1\leq j\leq M} |a_j^n - a_j^{n-1}| < 10^{-8}$ となった時，反復は収束したとみなし， $u_h + \delta u_h^n$ を改めて初期値 $u_h$ として決定する．

問題 (17) は， $\lambda > 0$ を大きくしていくと，あるところで自明解 $u = 0$ 以外の解が生じ，以下 2 つの非自明解が得られることがわかっている．

検証例 1

$\lambda = 150$, $a = 0.01$, 分割数 $N = 80$, $S_h$ の次元 $M = 6241$, 反復数 $=14$, $L^2$ 誤差 $= 0.0002474$ ．

図 1 は矩形領域 $\Omega$ の $y = 0.5$ に沿っての断面図を表わす．解は 2 つの曲線で囲まれた領域中に上記 $L^2$ 誤差をつけ加えた集合内に存在する．

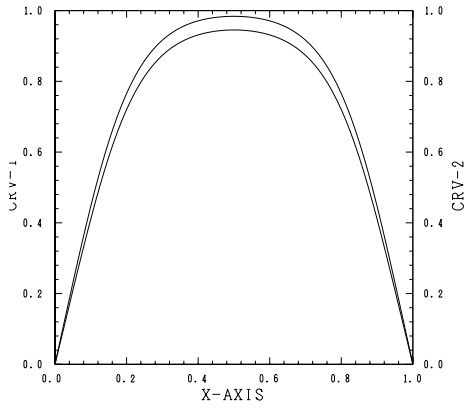


図 1: a=0.01, $\lambda$=150 に対する解の形状 ( 上の解 )

検証例 2

$\lambda = 150$, $a = 0.01$, 分割数 $N = 80$, $S_h$ の次元 $M = 6241$, 反復数 $=12$, $L^2$ 誤差 $= 0.0004242$ ．

図 2 は矩形領域 $\Omega$ の $y = 0.5$ に沿っての断面図を表わす．解は 2 つの曲線で囲まれた領域中に上記 $L^2$ 誤差をつけ加えた集合内に存在する．

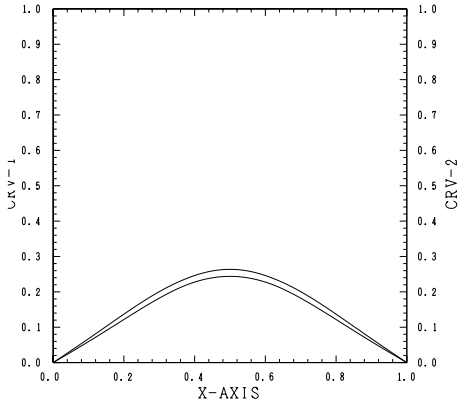


図 2:　a=0.01　$\lambda$=150 に対する解の形状 ( 下の解 )

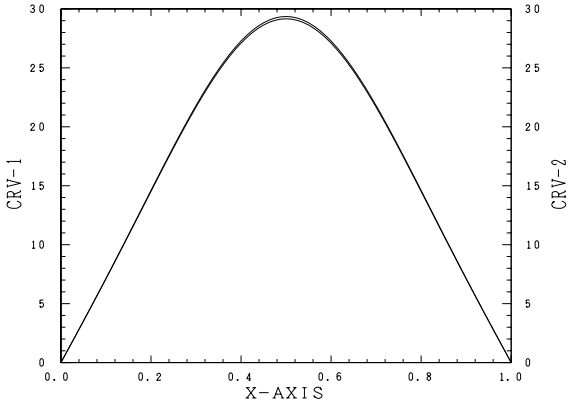


図 3: Emden's Equation の非自明解の形状

### 5.3　Emden's Equation

次に Emden's equation の非自明解を考える．

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^2, & \text{in} \quad \Omega. \\ u &= 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{18}$$

先ず $\omega$ を (18) の近似解として与える．近似解の取り方は，今までと同じ手法を用いる．次に，区分一次関数として求められる近似解 $\omega$ に対し擬 Helmite 補間を行い，区分三次関数として改めて $\omega \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を定義する．ここで，次の問題を考える。

$$\begin{cases} -\Delta v &= v^2 + 2\omega v + \Delta\omega + \omega^2, & \text{in} \quad \Omega. \\ v &= 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{19}$$

この時，$u = v + \omega$ が (18) の解となることが容易に確かめられる．従って (19) に対し，初期値 $v_h = 0$ として反復を行なうことで (18) の解の存在が検証できる．

検証例 3
分割数 $N = 80$, $S_h$ の次元 $M = 6241$, $\lambda = 1$, 反復数 $= 12$, $L^2$ 誤差 $= 0.0002630$.
図 3 は矩形領域 $\Omega$ の $y = 0.5$ に沿っての断面図を表わす．解は 2 つの曲線で囲まれた領域中に上記 $L^2$ 誤差をつけ加えた集合内に存在する．

### 5.4　MHD equation

次に，これまでに述べた非線形楕円型境界値問題の数値的検証法を，微分不能項を持つ MHD(magneto hydro dynamics) 平衡系を記述する方程式に対して適用させ，解の数値的検証を行う．

次の問題を考える．

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v^+, & \text{in} \quad \Omega. \\ v &= -1, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{20}$$

$\lambda \in \mathbf{R}$, $t^+ \equiv \max\{0, t\}$ とする．

(20) は MHD 平衡問題より導かれる非線形固有値問題であることが知られている ( cf. [5] ) ．

(20) に定式化を適用させるため，$v = u - 1$, $f(t) \equiv (t-1)^+$ とおき，(20) を以下のように同値変形する．

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(u), & \text{in} \quad \Omega. \\ u &= 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

定式化の過程では $F$ の Fréchet 微分を用いて Newton-like method を定義した，ここでは直接の Fréchet 微分は存在しないため，次の方法で部分の近似を行う．$f(t)$ は $t = 1$ 以外で連続微分可能であるので，$t = 1$ での微分値を適当な値 $\xi$ として $f$ の近似微分 $f'$ を次で定義する．

$$f'(t) \equiv \begin{cases} 1, & t > 1. \\ \xi, & t = 1. \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

更に $u_h \in S_h$ を (21) の何らかの方法で求めた近似解とする．このとき，$u_h$ での $F$ の Fréchet-like 微分 $F'(u_h)$ は次を満たす $H_0^1(\Omega)$ 上の線形作用素として決定できる．

$$(\nabla F'(u_h)u, \nabla w) = (f'(u_h)u, w), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

以下同様の定式化を行う．

ただし，プログラミングにおいては，$f$ が微分不能項を持つために，以下の点に注意が必要である．例えば，$K_i^{n-1}$ の決定で区間計算が必要な項

$$(f(\delta u_h^{n-1} + u_h) - f(u_h) - f'(u_h)\delta u_h^{n-1}, \phi_i)$$

は $\Omega$ の矩形分割された各要素 $\Omega_k (k = 1, ..., L, L$ は要素数 ) 上での評価を次の手法で行うことで決定する．

$K \equiv (f(\delta u_h^{n-1} + u_h) - f(u_h) - f'(u_h)\delta u_h^{n-1}, \phi_i)_{\Omega_k}$ とする．$d \equiv ||\delta u_h^{n-1}||_{L^\infty(\Omega_k)}$ とおくと，$f(t) = (t-1)^+$ の性質より直ちに $\Omega_k$ 上で $u_h \geq d+1, u_h \leq -d+1$ を満たすところでは $K = 0$ となることが導かれる．従って $K$ の積分範囲は $u_h = 1$ の部分に幅 $d$ をつけ加えた領域 $\{x \in \Omega_k\ ;\ -d \leq u_h - 1 \leq d\}$ のみを計算すればよい．

また，Fréchet-like 微分の計算 $(\nabla F'(u_h)\phi_k, \nabla\phi_j) = (f'(u_h)\phi_k, \phi_i)$ では，$u_h - 1$ の符号の評価が必要である．検証例では，$S_h$ が各要素 $\Omega_k$ の上で線形であることを用いて，各要素上の端点の値を調べることで $u_h - 1$ の符号を決定することができる．また，近似解 $u_h$ が単調性を持つことより，$\{x \in \Omega\ ;\ u_h(x) = 1\}$ の測度は 0 である．従って，$(f'(u_h)\phi_k, \phi_i)$ などの内積の計算では近似微分 $f'$ の定義で用いた $\xi$ は考慮に入れなくて計算できる．

検証例 4
$\lambda = 34.0898$, 分割数 $N = 120$, $S_h$ の次元 $M = 14161$, 反復数 10, $L^2$ 誤差 =0.0002919704．
図 4 矩形領域 $\Omega$ の $y = 0.5$ に沿っての断面図を表わす．解は 2 つの曲線で囲まれた領域中に上記 $L^2$ 誤差をつけ加えた集合内に存在する．

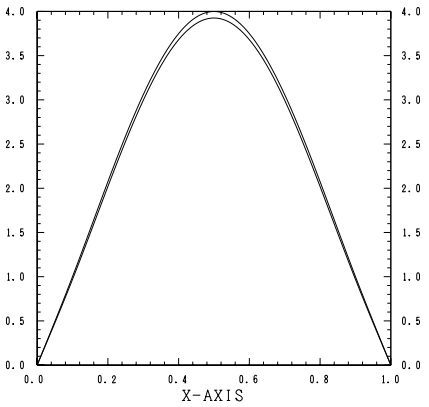


図 4: $\lambda$=34.0898 に対する $y = 0.5$ での断面図

## 参考文献


1. O.Axelsson and V.A.Barker : Finite Element Solution of Boundary Value Problems , Theory and Computation, Academic Press (1984).
2. P.G.Ciarlet : The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam (1978).
3. J.C.Eilbeck : The Pseudo-Spectral Method and Following in Reaction-Diffusion Bifurcation Studies, SIAM J.Sci.Stat.Comput.l7 (1986), 599—610.
4. E.W.Kaucher and W.L.Miranker : Self- Validating Numerics for Function Space Problems, Academic Press, New York (1984).
5. F.Kikuchi : Finite Element Analysis of a Nondifferentiable Nonlinear Problem Relared MHD equilibria, Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo Sect. IA, Math. 35 (1988), 77—101.
6. M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems, Japan Journal of Applied Mathematics, 5 (1988), 313—332.
7. M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems Ⅱ, Japan Journal of Applied Mathematics, 7 (1990), 477—488.
8. M.T.Nakao : A Computational Verification Method of Existence of Solutions for Nonlinear Elliptic Equations, Lectur Notes in Num. Appl. Anal., 10 (1988), 101—120. In proc. Recent Topics in Nonlinear PDE 4, Kyoto, 1988, North-Holland/Kinokuniya (1989).
9. M.T.Nakao : A Numerical Verification Method for the Existence of Weak Solutions for Nonlinear Boundary Value Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 164 (1992), 489–507.
10. E.Zeidler : Nonlinear Functional Analysis and its Applications 1, Springer, NewYork (1986).
11. Y.Watanabe, M.T.Nakao : Numerical Verifications of Solutions for Nonlinear Elliptic Equations, to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.