微分不能項を持つ楕円型境界値問題の解に対する数値的検証法

渡部 善隆　　山本 野人　　中尾 充宏

九州大学大型計算機センター　　九州大学理学部　　九州大学理学部

福岡市東区箱崎 6–10–1

あらまし 数理科学上様々な形で現われる微分方程式について，その解を計算機を用いて数値的に捉えようという試みは従来からなされてきた．最近では精度保証つき数値計算法と呼ばれる，解の存在あるいは局所一意性までをある領域内で保証するというアルゴリズムが提案され，新しい数値計算法として注目されている．

本稿では従来の研究成果である非線形楕円型境界値問題の数値的検証法を，微分不能項を持つ楕円型方程式に適用させ，解の数値的検証法の定式化を行う．また，数値例として MHD 平衡系を記述する方程式に対して解の検証を行う．

和文キーワード 数値的検証，楕円型問題，微分不能項

Numerical verifications of solutions for nondifferentiable nonlinear elliptic equations

Yoshitaka Watanabe[1]　　Nobito Yamamoto[2]　　Mitsuhiro T.Nakao[2]

[1] Computer center, Kyushu University

[2] Department of Mathematics, Kyushu University

Kyushu University 33, Fukuoka 812, Japan

Abstract A numerical technique which enables us to verify the existence of weak solutions for nondifferentiable nonlinear elliptic boundary value problems is proposed. It is based on the infinite dimensional fixed point theorems using the Newton-like operator and the error estimates for finite element approximations. We also present an effective verification procedure which automatically generates the set including the exact solution in a computer. Numerical examples which related to MHD equilibria are illustrated.

英文 **key words** numerical verification, nondifferentiable problems, elliptic equations

社団法人 電子情報通信学会 (The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers)

信学技法 (Technical Report of IEICE) NLP92-44(1992-12) pp.17–24

1　はじめに

数理科学上様々な形で現われる微分方程式について，その解を計算機を用いて数値的に捉えようという試みは従来からなされてきた [11]．最近では精度保証つき数値計算法と呼ばれる，解の存在あるいは局所一意性までをある領域内で保証するというアルゴリズムが提案され，新しい数値計算法として注目されている [12]．

本稿では [14] で述べられた非線形楕円型境界値問題の数値的検証法を，微分不能項を持つ楕円型方程式に適用させ，解の数値的検証法の定式化を行う．また，数値例として MHD 平衡系を記述する方程式に対して解の検証を行う．

2　問題と定式化

次の問題を考える．

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda f(u), & \text{in} \quad \Omega. \\ u & = & 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

Ω は $\mathbf{R}^n (1 \leq n \leq 3)$ の有界凸領域，$\partial\Omega$ は区分的な滑らかな Ω の境界とする．$\lambda \in \mathbf{R}$, $f(t)$ は次の仮定を満たす微分不能項を持つ実数値関数とする．

仮定 **1**　　対応 $u \longrightarrow f(u)$ は $H_0^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への連続写像．

仮定 **2**　　U が $H_0^1(\Omega)$ の有界集合のとき $f(U)$ は $L^2(\Omega)$ で有界．

上の仮定を満たす f としては，例えば $f(t) = t^+ \equiv \max\{0, t\}$ など，有限個の点で微分が不可能となる関数があげられる．

ここで $H^m(\Omega)$ は Ω 上の m 次 L^2-Sobolev 空間，また $H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \ \ on \ \ \partial\Omega \}$ とする．この時 $H_0^1(\Omega)$ の内積は $(u , v)_{H_0^1(\Omega)} \equiv (\nabla u , \nabla v)$ で定義される．ただし $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega)$ 内積，$\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n})$ とおく．

(1) の解を数値的に検証するにあたって，問題の不動点形式化を行う．まず (1) を次の弱形式 (weak form) に書き直す．

$$\text{find} \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \qquad \text{s.t.} \qquad (\nabla u , \nabla v) = \lambda(f(u) , v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

次に $\psi \in L^2(\Omega)$ に対し，境界値問題

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \phi & = & \psi, & \text{in} \quad \Omega. \\ \phi & = & 0, & \text{on} \ \ \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3}$$

は一意の解 $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を持ち，次の評価が成り立つことがよく知られている。

$$| \phi |_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \| \psi \|_{L^2(\Omega).} \tag{4}$$

ただし，C_1 は ψ に依らない正の定数，$| \cdot |_{H^2(\Omega)}$ は $H^2(\Omega)$-seminorm である．ここで，$\psi \in L^2(\Omega)$ に対して，作用素 G を $G\psi$ が (3) の解となるものとして定義する．

このとき $G \ : \ L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ は isomorphism かつ埋め込み $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ が compact であることより，

$$G \ : \ L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \ : \ \text{compact}$$

がいえる．また仮定 1, 仮定2 より非線形作用素 F を

$$F \equiv G\lambda f \tag{5}$$

とおくと，F は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への compact 作用素として定義される．この時，弱形式 (2) は不動点形式

$$u = Fu$$

に表わせる。

次に Newton-like method を導入する．これはいくつかの仮定のもと F についての不動点問題と同値になるものである．S_h を パラメータ h ($0 < h < 1$) に依存する $H_0^1(\Omega)$ の有限要素部分空間とする．通常添字 h は領域の分割幅を表わす．また P_h を次式で定まる $H_0^1(\Omega)$ から S_h への $H_0^1(\Omega)$ の意味での直交射影 (H_0^1-projection) とする．

$$(\nabla(u - P_h u), \nabla v) = 0, \qquad \forall v \in S_h. \tag{6}$$

次に F の Fréchet 微分の近似を定義する．f の近似微分 f' を任意の $v, u \in H_0^1(\Omega)$ に対し $f'(u)v \in L^2(\Omega)$ となるように定め，$u_h \in S_h$ を (2) の何らかの方法で求めた近似解とする (具体的な決定例は数値例を参照) ．このとき，u_h での F の Fréchet-like 微分 $F'(u_h)$ を次で決定する．

$$(\nabla F'(u_h)u, \nabla w) = (f'(u_h)u, w).$$

Fréchet-like 微分について次を仮定する．

仮定 3　写像 $P_h(I - F'(u_h)) : H_0^1(\Omega) \to S_h$ を S_h に制限したものは逆作用素 $[I - F'(u_h)]_h^{-1} : S_h \to S_h$ を持つ．
ただし I は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への恒等写像とする．

次に ε を $0 < \varepsilon < 1$ なる微小なパラメータとし，非線形作用素 $T_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ を次式で定義する．

$$T_\varepsilon u \equiv \{ I - ([I - F'(u_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I)(I - F) \} u \tag{7}$$

この時 $[I - F'(u_h)]_h^{-1} P_h + \varepsilon I$ が逆作用素を持てば，二つの不動点問題 $u = Fu$ と $u = T_\varepsilon u$ は同値である．

(7) で定義した作用素 T_ε は簡単な変形より condensing operator であることがわかる．従って仮定 1，仮定 2 および仮定 3 のもとで $H_0^1(\Omega)$ の空でない有界凸閉集合 U に対し $T_\varepsilon U \subset U$ が成立すれば，Sadovskii の不動点定理 [13] によって U の中に T の不動点が存在する．更に $[I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon I$ が可逆ならば，この不動点は F の不動点即ち (2) の解となる．

以下 Sadovskii の不動点定理の仮定を満たすような $H_0^1(\Omega)$ の部分集合 U を計算機上で実現するための方法について述べる．

3　rounding と検証条件

(7) で定義された T_ε は，無限次元空間 $H_0^1(\Omega)$ から同じ $H_0^1(\Omega)$ への作用素である．従って計算機内で直接 U ,$T_\varepsilon U \subset H_0^1(\Omega)$ を求めることは不可能である．ここでは $H_0^1(\Omega)$ の要素と方程式を計算機内で取り扱えるようにするために，[10] に従い rounding 及び rounding error の概念を導入し，それに基ずく検証手順について述べる．

rounding

$u \in H_0^1(\Omega)$ を，先に導入した有限要素空間 S_h で近似することを rounding (丸め込み) と呼ぶ．u の S_h での近似は，(6) で定義した H_0^1-projection $P_h u$ で行なう．従って $Tu \in H_0^1(\Omega)$ に対する rounding $\tilde{T_\varepsilon} u \equiv P_h T_\varepsilon u$ は次の形をとる．

$$\tilde{T_\varepsilon} u \quad \equiv \quad \{\tilde{I} - ([I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon\tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F})\} u$$

ただし $\tilde{I} = P_h I$, $\tilde{F} = P_h F$ である．また，集合 $T_\varepsilon U$ に対する rounding は次で定める．

$$R(T_\varepsilon U) \equiv \{ v \in S_h \mid v = \tilde{T_\varepsilon} u, \ \ u \in U \}$$

rounding error

rounding によって S_h の元に "丸め込まれた" $P_h u$ と，元の $H_0^1(\Omega)$ の要素 u との誤差評価のことを rounding error と呼ぶ．S_h の近似性として，$P_h u$ に対し次の評価を仮定する．

仮定 4

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 h |u|_{H^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{8}$$

ただし C_2 は u と h によらない正の定数．

実際 (8) は，C_2 の数値的決定性をも含めて，多くの有限要素空間で成り立つことが知られている（例えば [3]）．

ここで，集合 $T_\varepsilon U$ についての rounding error を次で定義する

$$RE(T_\varepsilon U) \equiv \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha \quad \text{and} \quad \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\alpha\}, \tag{9}$$

$$\text{where} \qquad \alpha \equiv \sup_{u \in U} \|T_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{10}$$

$$C \equiv C_1 C_2. \tag{11}$$

この時，次の補題が成り立つ．

補題 1 $U \subset H_0^1(\Omega)$ を空でない有界凸閉集合とする．ある ε $(0 < \varepsilon < 1)$ に対して

$$R(T_\varepsilon U) \ \oplus \ RE(T_\varepsilon U) \ \overset{\circ}{\subset} \ U \tag{12}$$

が成立すれば，$u = Fu$ の解が U の中に存在する．但し $\oplus$ は $H_0^1(\Omega)$ の部分集合としての直交性を，$M_1 \overset{\circ}{\subset} M_2$ は $\overline{M_1} \subset \overset{\circ}{M_2}$ を意味する．

続いて検証条件 (12) をみたす集合 U を計算機内で生成するためのアルゴリズムを与える．

有限要素空間 S_h の次元を M として，基底を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ とする．Θ_h を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ と区間係数との一次結合全体とする．このとき Θ_h の各要素は S_h の部分集合として定義される．つまり $\omega \in \Theta_h$ は

$$\omega = \sum_{j=1}^M A_j \phi_j \equiv \{ \sum_{j=1}^M a_j \phi_j \mid a_j \in A_j \}$$

を意味する．ただし A_j は実数の区間を表わす．

次に $\mathbf{R}^+$ を非負実数の集合 とおき，$\alpha \in \mathbf{R}^+$ に対して，

$$[\alpha] \equiv \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha \quad and \quad \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\alpha\}. \tag{13}$$

なる集合を導入する．これは，前節で導入した rounding error に対応するものである．

$u_h \in S_h$ を (2) の近似解，δ を正の定数，$\alpha_0 \in \mathbf{R}^+$ を初期誤差とする．さらに $\delta u_h^0 \in \Theta_h$ を適当に決める．以上の初期要素に対し次の様な反復法を定義する．

$n \geq 1$ に対し，δu_h^{n-1}，$[\alpha_{n-1}]$ は既知とする．この時，δ に対して，次を定義する．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta \tilde{u}_h^{n-1} & \equiv & \delta u_h^{n-1} + \sum_{j=1}^M [\,-1, 1\,]\, \delta\, \phi_j, \\ \tilde{\alpha}_{n-1} & \equiv & \alpha_{n-1} + \delta. \end{array} \right. \tag{14}$$

(14) は区間及び誤差を拡大させたものであり，δ-inflation と呼ばれる．δ-inflation された集合に対し，改めて $U^{n-1} = u_h + \delta u_h^{n-1} + [\alpha_{n-1}]$ とおいて，次のステップ δu_h^n，α_n を以下で与える．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta u_h^n & \equiv & \tilde{T}_\varepsilon U^{n-1} - u_h, \\ \alpha_n & \equiv & Ch\lambda \sup_{u \in U^{n-1}} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right. \tag{15}$$

この時，補題 1 を用いて次の定理が成立する．

定理 1　　ある $n \geq 1$ に対して

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \delta u_h^n & \overset{\circ}{\subset} & \delta u_h^{n-1}, \\ \alpha_n & < & \alpha_{n-1} \end{array} \right. \tag{16}$$

が成立すれば $U^n = u_h + \delta u_h^n + [\alpha_n]$ の中に (2) の解 u が存在する．ここで (16) の第一式は各係数区間の包含関係として考える．つまり，$\delta u_h^{n-1} = \sum_{j=1}^{M} A_j \phi_j$ ，$\delta u_h^n = \sum_{j=1}^{M} B_j \phi_j$ とおく時，(16) の第一式は $B_j \overset{\circ}{\subset} A_j$ $(j = 1, \cdots, M)$ を意味する．

4　プログラムの構成

本節では，(15) で定義される反復列の行列とベクトルを用いた具体的な計算法について述べる $(\mathrm{cf.}[14])$．まず (15) の第 1 式を次の様に変形する．

$$\begin{array}{rcl} \delta u_h^n & = & -([I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon \tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F}) u_h + \delta u_h^{n-1} \\ & & -([I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon \tilde{I})\{(\tilde{I} - \tilde{F}) U^{n-1} - (\tilde{I} - \tilde{F}) u_h\} \end{array} \tag{17}$$

(17) の第 1 項 $-([I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon \tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F}) u_h$ は反復によらず，しかも u_h に対応する S_h の元として一意に決めることが出来る．従って第 1 項は実数列 $\{ a_j^n \}_{j=1}^M$ を用いて次の形に書ける．

$$\sum_{j=1}^{M} a_j \, \phi_j. \tag{18}$$

それに対し，(17) の第 2 項及び第 3 項 $\delta u_h^{n-1} - ([I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon \tilde{I})\{(\tilde{I} - \tilde{F}) U^{n-1} - (\tilde{I} - \tilde{F}) u_h\}$ については，S_h のべき集合の要素として決定される．しかし，実際の計算機上での演算においては，無限次元の項を含むために正確な値を算定することは一般に出来ない．従って，区間係数を拡大させる形で Θ_h の要素としての包み込みを行なう必要がある．

第 2 項，第 3 項の Θ_h の要素としての包み込みを

$$\sum_{j=1}^{M} B_j^n \, \phi_j. \tag{19}$$

とおく．$\{ B_j^n \}_{j=1}^M$ は区間係数である．以上より δu_h^n は $\sum_{j=1}^{M} (a_j + B_j^n) \, \phi_j$ として計算機内で決定される．

次に係数 $\{a_j\}_{j=1}^M$ ，$\{B_j^n\}_{j=1}^M$ の決め方について考察する．$\sum_{j=1}^{M} a_j \, \phi_j = -([I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon \tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F}) u_h$ の両辺に $[I - F'(u_h)]_h$ を作用させる．ただし添字 h は S_h への制限を意味する．$[I - F'(u_h)]_h$ が線形であることに注意して

$$\sum_{j=1}^{M} a_j [I - F'(u_h)]_h \phi_j = -(\tilde{I} - \tilde{F}) u_h - \varepsilon [I - F'(u_h)]_h \, (\tilde{I} - \tilde{F}) u_h \, .$$

次に，上式と S_h の基底 ϕ_i ($i = 1, 2, ..., M$) との $H_0^1(\Omega)$ 内積をとると

$$\sum_{j=1}^{M} a_j (\nabla [I - F'(u_h)]_h \phi_j, \nabla \phi_i) = -(\nabla (\tilde{I} + \varepsilon [I - F'(u_h)]_h)(u_h + \tilde{F} u_h), \nabla \phi_i).$$

ここで，初期値 u_h は領域の各 node 上の値として，また $\tilde{F} u_h$ は 関数 f によってそれぞれ S_h の元として次の形に書ける．

$$u_h \equiv \sum_{j=1}^{M} b_j \phi_j, \qquad (b_j \in \mathbf{R}), \tag{20}$$

$$\tilde{F}u_h \equiv \sum_{j=1}^{M} c_j\phi_j, \qquad (c_j \in \mathbf{R}). \tag{21}$$

(20) , (21) より，

$$\sum_{j=1}^{M} a_j(\ \nabla[I-F'(u_h)]_h\phi_j, \nabla\phi_i) = \sum_{j=1}^{M}(c_j-b_j)(\ \nabla(\tilde{I}+\varepsilon[I-F'(u_h)]_h)\phi_j, \nabla\phi_i) \tag{22}$$

を得る．次に (22) を行列とベクトルの積の形で表現する．各 $1 \le i,j \le M$ について，

$$g_{ji} \equiv (\ \nabla[I-F'(u_h)]_h\phi_j, \nabla\phi_i\ ), \tag{23}$$

$$d_{ji} \equiv (\ \nabla\phi_j, \nabla\phi_i\ ). \tag{24}$$

とおき，それぞれ g_{ji} , d_{ji} を成分とする $M \times M$ 行列を G , D と記述する．仮定 1 より G は逆行列を持つ．また 有限要素空間 $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ の性質より， D も逆行列を持つとしてよい (例えば $[2]$ による) ．従って，次が成り立つ．

命題 1 (22) に対応して，(18) の係数 a_j は次で求まる．

$$(a_j) = (\ G^{-1}D+\varepsilon E)(c_i-b_i) \tag{25}$$

ただし E は単位行列， G^{-1} は G の逆行列を，$(\ a_i\ ), (\ b_i-c_i\ )$ は各成分を並べたベクトルを表わす．

区間係数 B_j^n の決定も，同様の手続きを踏む．

$$\psi \equiv \delta u_h^{n-1} - ([I-F'(u_h)]_h^{-1}+\varepsilon\tilde{I})\{(\tilde{I}-\tilde{F})U^{n-1} - (\tilde{I}-\tilde{F})u_h\}$$

とおく．以下 ψ を包み込むような Θ_h の要素 $\sum_{j=1}^{M} B_j^n\phi_j$ を決める．まず，上式の両辺に $[I-F'(u_h)]_h$ を作用させて変形すると，

$$[\ I-F'(u_h)\ ]_h\psi = (\ \tilde{I}+(1-\varepsilon)[\ I-F'(u_h)\ ]_h)\delta u_h^{n-1} + (\tilde{I}+\varepsilon[\ I-F'(u_h)\ ]_h)(\ \tilde{F}U^{n-1}-\tilde{F}u_h\ )$$

$\tilde{F}U^{n-1}-\tilde{F}u_h$ の Θ_h での表現を

$$\sum_{j=1}^{M} K_j^{n-1}\phi_j \tag{26}$$

と書く．ただし， K_j^{n-1} は区間係数を表わす． $\delta u_h^{n-1} \equiv \sum_{j=1}^{M} A_j^{n-1}\phi_j$ とおく． a_j の評価の時と同様に，両辺と S_h の基底 $\phi_i\ \ (i=1,....,M)$ との $H_0^1(\Omega)$ 内積をとることより

$$\begin{aligned}&(\ \nabla[I-F'(u_h)]_h\psi\ ,\ \nabla\phi_i\ )\\ &\subset \sum_{j=1}^{M} A_j^{n-1}(\ \nabla\{(1-\varepsilon)[I-F'(u_h)]_h-\tilde{I}\}\phi_j\ ,\ \nabla\phi_i\ ) + \sum_{j=1}^{M} K_j^{n-1}(\ \nabla\{\tilde{I}+\varepsilon[I-F'(u_h)]_h\}\phi_j\ ,\ \nabla\phi_i\ )\end{aligned} \tag{27}$$

ここで (27) の右辺と等号が成り立つように ψ を $\sum_{j=1}^{M} B_j^n\phi_j$ で包み込んでやれば，$[I-F'(u_h)]_h$ の線形性と，$(23), (24)$ を用いて B_j^n はベクトルと行列の積の形で次の様に決定される．

$$(B_j^n) = (\ (1-\varepsilon)E-G^{-1}D\ )(A_i^{n-1}) + (G^{-1}D+\varepsilon E)(K_i^{n-1}) \tag{28}$$

(28) の第 1 項と第 2 項は，ともにスカラー値行列と区間ベクトルの積として決まる．しかし区間演算の性質上，このままでの評価では検証条件を満足するような収束を得ることは一般に困難である．従って，次の形に変形する．(26) と $\tilde{F}$ の性質より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M} K_j^{n-1}(\nabla\phi_j, \nabla\phi_i) &= (\nabla(\tilde{F}U^{n-1} - \tilde{F}u_h), \nabla\phi_i) \\ &= \lambda(f(U^{n-1}) - f(u_h), \phi_i)\end{aligned}$$

$U^{n-1} = u_h + \delta u_h^{n-1} + [\alpha_{n-1}]$ より，$f(U^{n-1}) - f(u_h)$ を 関数 k を適当に定めることで $f'(u_h)\delta u_h^{n-1} + k(u_h, \delta u_h^{n-1}, [\alpha_{n-1}])$ の形に表す．

$$\sum_{j=1}^{M} K_j^{n-1}(\nabla\phi_j, \nabla\phi_i) = \sum_{j=1}^{M} A_j^{n-1}\lambda(f'(u_h)\phi_j, \phi_i) + \lambda(k(u_h, \delta u_h^{n-1}, [\alpha_{n-1}]), \phi_i) \tag{29}$$

ここで

$$\hat{K}_i^{n-1} = \lambda(k(u_h, \delta u_h^{n-1}, [\alpha_{n-1}]), \phi_i) \tag{30}$$

とおく．$\{\hat{K}_j^{n-1}\}_{j=1}^{M}$ は区間ベクトルとして決まる．一方で Fréchet-like 微分の定義から

$$\begin{aligned}g_{ji} &= (\nabla[I - F'(u_h)]_h\phi_j, \nabla\phi_i) \\ &= d_{ji} - \lambda(f'(u_h)\phi_j, \phi_i)\end{aligned}$$

が成り立つ．以上から次の結果を得る．

命題 2　(19) の区間係数 B_i^n は次で決まる．

$$(B_i^n) = -\varepsilon D^{-1}G(A_j^{n-1}) + (G^{-1} + \varepsilon D^{-1})(\hat{K}_j^{n-1}) \tag{31}$$

(31) の右辺で ε は微小なパラメーターなので，B_j^n の値はほぼ $G^{-1}(\hat{K}_j^{n-1})$ で与えられることになる．

5　数値例

前節までで行った定式化およびプログラムの構成にもとずき，非線形項を持つ楕円型境界値問題に対し検証を行う．

次の問題を考える．

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+, & \text{in} \quad \Omega. \\ u = 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{32}$$

$\Omega = (0,1)\times(0,1)$ とする．(32) は MHD 平衡系を記述する問題より導かれるものである（ $cf.$ [6] ）．

前節までの定式化に適用させるため，$u = w - 1$ とおき，(32) を以下のように変形する．

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda(w-1)^+, & \text{in} \quad \Omega. \\ w = 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{33}$$

$f = (t-1)^+$ に対し，近似微分 $f'(t)$ は次で定義する．

$$f'(t) \equiv \begin{cases} 1, & t > 1. \\ \frac{1}{2}, & t = 1. \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

実際の計算では近似解 u_h の単調性より，$u_h = 1$ となる領域の測度は 0 であることが確認されるため，前節で述べた各内積計算において $u_h = 1$ での積分は計算の必要がない．

有限要素空間 S_h は次で定める．まず，区間 $(\,0,1\,)$ を N 等分し，$x_i = \frac{i}{N}$, $I_i = (\,x_{i-1}, x_i\,)$ $\quad(i = 1,2,....,N)$, $h = \frac{1}{N}$ とおく．I_i 上一次となる多項式の集合を $P_1(I_i)$ とおき，有限要素空間 $\mathcal{M}_0^1(x)$ を次で定義する．

$$\mathcal{M}_0^1(x) \equiv \{\, v \in C(0,1)\,;\; v|_{I_i} \in P_1(\Omega_i)\,, 1 \le i \le N,\, v(0) = v(1) = 0\,\}. \tag{34}$$

$\mathcal{M}_0^1(x)$ の基底として hat function を用いる．

$$\phi_j(x_k) = \begin{cases} 1 \quad (k = j), \\ \\ 0 \quad (k \neq j), \end{cases} \qquad \text{for} \quad 1 \le j,k \le N-1\,. \tag{35}$$

同様に y 方向に同じ分割を施し，$\mathcal{M}_0^1(y)$ を定義する．$H_0^1(\Omega)$ の有限要素空間は $S_h \equiv \mathcal{M}_0^1(x) \otimes \mathcal{M}_0^1(y)$ で定義する．また，定数 C は $\dfrac{1}{\pi}$ とできる（[9]）．初期設定は $\delta u_h^0 = [\,0,0\,]$, $\alpha_0 = 0$ とし，$\delta = 10^{-5}$ で検証を行った．

検証例

$\lambda = 34.0898$, 分割数 $N = 120$, S_h の次元 $M = 14161$, 反復数 10, L^2誤差 $= 0.0002919704$．

下図は矩形領域 Ω の Y=0.5 に沿っての断面図を表わす．解は 2 つの曲線で囲まれた領域中に上記 L^2 誤差をつけ加えた集合内に存在する．

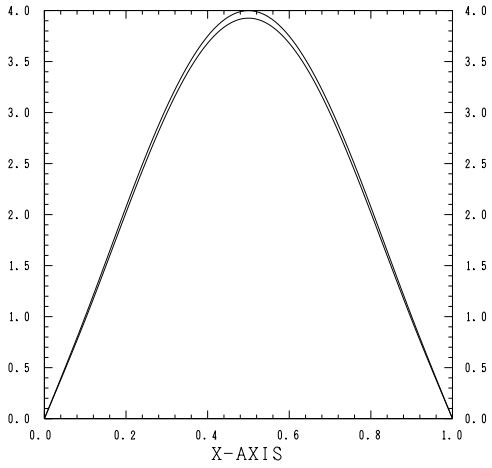

図 1: λ=34.0898 に対する解の形状

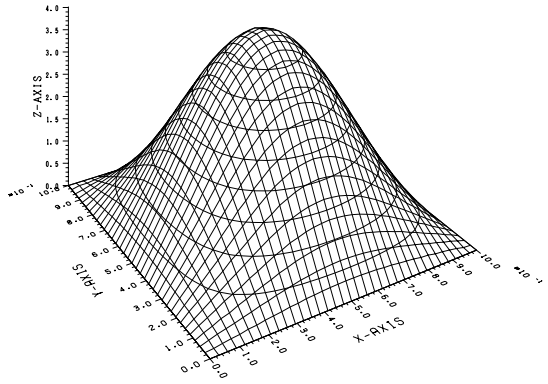

図 2: λ=34.0898 に対する近似解の形状

参考文献

[1] G.Alefeld and J.Herzberger : Introduction to Interval Computations , *Academic Press* (1983).

[2] O.Axelsson and V.A.Barker : Finite Element Solution of Boundary Value Problems , Theory and Computation , *Academic Press* (1984).

[3] P.G.Ciarlet : The Finite Element Method for Elliptic Problems, *North-Holland,Amsterdam* (1978).

[4] V.Girault and P.A.Raviart : Finite Element Methods for Navier-Stokes Equation , Theory and Algorithms , *Springer,New York* (1986).

[5] E.W.Kaucher and W.L.Miranker : Self-Validating Numerics for Function Space Problems, *Academic Press, New York* (1984).

[6] F.Kikuchi : Finite Element Analysis of a Nondifferentiable Nonlinear Problem Relared MHD equilibria, *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo Sect. IA, Math. 35* (1988), 77—101.

[7] M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems , *Japan Journal of Applied Mathematics, 5* (1988), 313—332.

[8] M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems Ⅱ , *Japan Journal of Applied Mathematics, 7* (1990), 477—488.

[9] M.T.Nakao : A Computational Verification Method of Existence of Solutions for Nonlinear Elliptic Equations, *Lectur Notes in Num.Appl.Anal., 10* (1988), 101—120. *In proc.Recent Topics in Nonlinear PDE 4,Kyoto, 1988, North-Holland/Kinokuniya* (1989).

[10] M.T.Nakao : A Numerical Verification Method for the Existence of Weak Solutions for Nonlinear Boundary Value Problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 164* (1992), 489–507.

[11] 中尾充宏：関数方程式の解の存在に対する数値的検証法, 数学, 42 (1990), 16—31.

[12] 中尾充宏：精度保証付き数値計算の現状と動向，情報処理, Vol.31, No.9 (1990), 1177—1190.

[13] E.Zeidler : Nonlinear Functional Analysis and its Applications 1, *Springer,New York,* (1986).

[14] Y.Watanabe, M.T.Nakao : Numerical Verifications of Solutions for Nonlinear Elliptic Equations , *to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.*