微分不能項を持つ楕円型方程式の解に対する検証問題について

Numerical Verifications of Solutions for Nondifferentiable Elliptic Equations

渡部 善隆 † 山本 野人 ‡ 中尾 充宏 ‡

Yoshitaka Watanabe Nobito Yamamoto Mitsuhiro T.Nakao

† 九州大学大型計算機センター
Computer Center, Kyushu University

‡ 九州大学理学部
Department of Mathematics, Kyushu University

1 問題と定式化

本稿では微分不能項を持つ MHD(magnetohydrodynamics) 平衡系を記述する方程式に対して [10] で述べられた非線形楕円型境界値問題の数値的検証法を適用させ，解の数値的検証を行う．

次の問題を考える．

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v^+, & \text{in} \quad \Omega. \\ v &= -1, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Ω は $\mathbf{R}^n (1 \leq n \leq 3)$ の有界凸領域，$\partial\Omega$ は区分的に滑らかな Ω の境界，$\lambda \in \mathbf{R}$, $t^+ \equiv \max\{0, t\}$ とする．(1) は MHD 平衡問題より導かれる非線形固有値問題であることが知られている (cf. [4]).

(1) に [10] で行った定式化を適用させるため，$v = u - 1$, $f(t) \equiv (t-1)^+$ とおき，(1) を以下のように同値変形する．

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(u), & \text{in} \quad \Omega. \\ u &= 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

$H^m(\Omega)$ を Ω 上の m 次 L^2–Sobolev 空間，$H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \ on \ \partial\Omega \}$ とする．$H_0^1(\Omega)$ の内積は $(u , v)_{H_0^1(\Omega)} \equiv (\nabla u , \nabla v)$ で定義する．ただし $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega)$ 内積，$\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n})$ とおく．このとき実数値関数 $f(t)$ に対し，次の性質が成り立つ．

補題 1 対応 $u \to f(u)$ は $H_0^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への連続写像．

[証明] $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$ をとる．$\Omega_1 = \{ x \in \Omega \ ; \ u(x) \geq 1, v(x) \geq 1 \}$, $\Omega_2 = \{ x \in \Omega \ ; \ u(x) \geq 1, v(x) < 1 \}$, $\Omega_3 = \{ x \in \Omega \ ; \ u(x) < 1, v(x) \geq 1 \}$ とおくと，

$$\begin{aligned} ||f(u) - f(v)||^2_{L^2(\Omega)} &= ||(u-1) - (v-1)||^2_{L^2(\Omega_1)} + ||u-1||^2_{L^2(\Omega_2)} + ||v-1||^2_{L^2(\Omega_3)} \\ &\leq ||u-v||^2_{L^2(\Omega_1)} + ||(u-1) - (v-1)||^2_{L^2(\Omega_2)} + ||(v-1) - (u-1)||^2_{L^2(\Omega_3)} \\ &\leq ||u-v||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

以上より直ちに補題の結果を得る．

補題 **2**　　U が $H_0^1(\Omega)$ の有界集合のとき $f(U)$ は $L^2(\Omega)$ で有界．
[証明] 補題 1 と同様の手順で導かれる．

(2) の解を数値的に検証するにあたって，問題の不動点形式化を行う．まず (2) を次の弱形式 (weak form) に書き直す．

$$\text{find} \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \qquad \text{s.t.} \qquad (\nabla u\,,\nabla v\,) = \lambda(\,f(u)\,,v\,), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

次に $\psi \in L^2(\Omega)$ に対し，境界値問題

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\phi & = & \psi, & \text{in} \quad \Omega. \\ \phi & = & 0, & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4}$$

は一意の解 $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を持ち，次の評価が成り立つことがよく知られている。

$$|\,\phi\,|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \|\psi\|_{L^2(\Omega).} \tag{5}$$

ただし，C_1 は ψ に依らない正の定数，$|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ は $H^2(\Omega)-$seminorm である．ここで，$\psi \in L^2(\Omega)$ に対して，作用素 G を $G\psi$ が (4) の解となるものとして定義する．

このとき $G \;:\; L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ は isomorphism，かつ埋め込み $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ が compact であることより，G は $L^2(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への compact 作用素である．従って補題 1, 補題 2 より非線形作用素 F を

$$F \equiv G\lambda f$$

とおくと，F は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への compact 作用素として定義される．この時，弱形式 (3) は不動点形式 $u = Fu$ に表わせる。

次に Newton-like method を導入する．S_h を パラメータ h $(0 < h < 1)$ に依存する $H_0^1(\Omega)$ の有限要素部分空間とする．通常添字 h は領域の分割幅を表わす．また P_h を次式で定まる $H_0^1(\Omega)$ から S_h への $H_0^1(\Omega)$ の意味での直交射影 (H_0^1-projection) とする．

$$(\,\nabla(u - P_h u)\,,\nabla v\,) = 0, \qquad \forall v \in S_h. \tag{6}$$

次に F の Fréchet 微分の近似を定義する．$f(t)$ は $t = 1$ 以外で連続微分可能であるので，$t = 1$ での微分値を適当な値 ξ として f の近似微分 f' を次で定義する．

$$f'(t) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 1, & t > 1. \\ \xi, & t = 1. \\ 0, & t < 1. \end{array} \right.$$

更に $u_h \in S_h$ を (3) の何らかの方法で求めた近似解とする．このとき，u_h での F の Fréchet-like 微分 $F'(u_h)$ は次を満たす $H_0^1(\Omega)$ 上の線形作用素として決定できる．

$$(\nabla F'(u_h)u, \nabla w) = \lambda(f'(u_h)u, w), \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

ここで $u_h = 1$ となる Ω の集合は測度 0 であるので，$F'(u_h)$ は上記の ξ に無関係に決定できる．

Fréchet-like 微分について次を仮定する．

仮定 1　写像 $P_h(I - F'(u_h))\ :\ H_0^1(\Omega) \to S_h$ を S_h に制限したものは逆作用素 $[I - F'(u_h)]_h^{-1}\ :\ S_h \to S_h$ を持つ．ただし I は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への恒等写像とする．

仮定 1 は行列の正則性と同値であることより，実際には次節で示される検証手順の実行過程で確認ができる．次に ε を $0 < \varepsilon < 1$ なる微小なパラメータとし，非線形作用素 $T_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ を次式で定義する．

$$T_\varepsilon u \equiv \{\ I - (\ [\ I - F'(u_h)\ ]_h^{-1} P_h + \varepsilon I\ )(\ I - F\ )\ \}u \tag{7}$$

この時 $[\ I - F'(u_h)\ ]_h^{-1} P_h + \varepsilon I$ が逆作用素を持てば，二つの不動点問題 $u = Fu$ と $u = T_\varepsilon u$ は同値である．

(7) で定義した作用素 T_ε は簡単な変形より condensing operator であることがわかる．従って，仮定 1 のもとで $H_0^1(\Omega)$ の空でない有界凸閉集合 U に対し $T_\varepsilon U \subset U$ が成立すれば，Sadovskii の不動点定理 [9] によって U の中に T の不動点が存在する．更に $[I - F'(u_h)]_h^{-1} + \varepsilon I$ が可逆ならば，この不動点は F の不動点即ち (3) の解となる．

以下 Sadovskii の不動点定理の仮定を満たすような $H_0^1(\Omega)$ の部分集合 U を計算機上で実現するための方法について述べる．

2　rounding と検証条件

無限次元空間上の作用素 T_ε に対し，$H_0^1(\Omega)$ の要素と方程式を計算機内で取り扱うため，[8] に従い rounding 及び rounding error の概念を導入し，それに基づく検証手順について述べる．

$u \in H_0^1(\Omega)$ を，先に導入した有限要素空間 S_h で近似することを rounding（丸め込み）と呼ぶ．u の S_h での近似は，(6) で定義した H_0^1–projection $P_h u$ で行なう．$Tu \in H_0^1(\Omega)$ に対する rounding　$\tilde{T}_\varepsilon u \equiv P_h T_\varepsilon u$ は $\tilde{I} = P_h I$ ，$\tilde{F} = P_h F$ に対し，$\tilde{T}_\varepsilon u \equiv \{\tilde{I} - ([\ I - F'(u_h)\ ]_h^{-1} + \varepsilon\tilde{I})(\tilde{I} - \tilde{F})\}u$ の形をとる．また，集合 $T_\varepsilon U$ に対する rounding は次で定める．

$$R(T_\varepsilon U) \equiv \{v \in S_h \mid v = \tilde{T}_\varepsilon u,\ \ u \in U\}$$

次に，rounding によって S_h の元に "丸め込まれた" $P_h u$ と，元の $H_0^1(\Omega)$ の要素 u との誤差評価のことを rounding error と呼ぶ．S_h の近似性として，$P_h u$ に対し次の評価を仮定する．

仮定 2

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_2 h |u|_{H^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{8}$$

ただし C_2 は u と h に依らない正の定数とする．

実際 (8) は，C_2 の数値的決定性をも含めて，多くの有限要素空間で成り立つことが知られている（例えば [2]）．

ここで，集合 $T_\varepsilon U$ についての rounding error を次で定義する．

$$RE(T_\varepsilon U) \equiv \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \le \alpha \quad \text{and} \quad \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le Ch\alpha\}, \tag{9}$$

$$\text{where} \qquad \alpha \equiv \sup_{u \in U} \|T_\varepsilon u - \tilde{T}_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{10}$$

$$C \equiv C_1 C_2. \tag{11}$$

この時，次の補題が成り立つ (証明は [8]) ．

補題 3　$U \subset H_0^1(\Omega)$ を空でない有界凸閉集合とする．ある ε $(0 < \varepsilon < 1)$ に対して

$$R(T_\varepsilon U) \ \oplus \ RE(T_\varepsilon U) \ \overset{\circ}{\subset} \ U \tag{12}$$

が成立すれば，$u = Fu$ の解が U の中に存在する．但し $\oplus$ は $H_0^1(\Omega)$ の部分集合としての直交性を，$M_1 \overset{\circ}{\subset} M_2$ は $\overline{M_1} \subset \overset{\circ}{M_2}$ を意味する．

続いて検証条件 (12) をみたす集合 U を計算機内で生成するためのアルゴリズムを与える．有限要素空間 S_h の次元を M として，基底を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ とする．Θ_h を $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ と区間係数との一次結合全体とする．このとき Θ_h の各要素は S_h の部分集合として定義される．つまり $\omega \in \Theta_h$ は

$$\omega = \sum_{j=1}^M A_j \phi_j \equiv \{ \sum_{j=1}^M a_j \phi_j \mid a_j \in A_j \}$$

を意味する．ただし A_j は実数の区間を表わす．次に $\mathbf{R}^+$ を非負実数の集合 とおき，$\alpha \in \mathbf{R}^+$ に対して，

$$[\alpha] \equiv \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha \quad \text{and} \quad \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\alpha\}. \tag{13}$$

なる集合を導入する．これは，前節で導入した rounding error に対応するものである．$u_h \in S_h$ を (3) の近似解，δ を正の定数，$\alpha_0 \in \mathbf{R}^+$ を初期誤差とする．さらに $\delta u_h^0 \in \Theta_h$ を適当に決める．以上の初期要素に対し，以下の反復法を定義する．

$n \geq 1$ に対し，δu_h^{n-1}，$[\alpha_{n-1}]$ は既知とする．この時，δ に対して，次を定義する．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta \tilde{u}_h^{n-1} & \equiv & \delta u_h^{n-1} + \sum_{j=1}^M [\,-1, 1\,]\, \delta\, \phi_j, \\ \tilde{\alpha}_{n-1} & \equiv & \alpha_{n-1} + \delta. \end{array} \right. \tag{14}$$

(14) は区間及び誤差を拡大させたものであり，δ–inflation と呼ばれる．δ–inflation された集合を改めて $U^{n-1} = u_h + \delta u_h^{n-1} + [\alpha_{n-1}]$ とおいて，次のステップ δu_h^n，α_n を以下で与える．

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta u_h^n & \equiv & \tilde{T}_\varepsilon U^{n-1} - u_h, \\ \alpha_n & \equiv & Ch\lambda \sup_{u \in U^{n-1}} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right. \tag{15}$$

この時，補題 1 を用いて次の定理 ([8]) が成立する．

定理 1　ある $n \geq 1$ に対して

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta u_h^n & \overset{\circ}{\subset} & \delta u_h^{n-1}, \\ \alpha_n & < & \alpha_{n-1} \end{array} \right. \tag{16}$$

が成立すれば $U^n = u_h + \delta u_h^n + [\alpha_n]$ の中に (3) の解 u が存在する．ここで (16) の第一式は各係数区間の包含関係として考える．つまり，$\delta u_h^{n-1} = \sum_{j=1}^M A_j \phi_j$ ，$\delta u_h^n = \sum_{j=1}^M B_j \phi_j$ とおく時，(16) の第一式は $B_j \overset{\circ}{\subset} A_j$ $(j = 1, \cdots, M)$ を意味する．

3　プログラムの構成

(15) で定義される反復列の行列とベクトルを用いた具体的な δu_h^n の計算法の概略は以下の通りである (詳細は [10] 参照) . 各 $1 \leq i, j \leq M$ について , $u_h = \sum_{j=1}^{M} b_j \phi_j$, $\tilde{F} u_h = \sum_{j=1}^{M} c_j \phi_j$, $g_{ji} = (\nabla [I - F'(u_h)]_h \phi_j, \nabla \phi_i)$, $d_{ji} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)$ とおき , それぞれ g_{ji} , d_{ji} を成分とする $M \times M$ 行列を G , D と記述する . 仮定 1 より G は逆行列を持つ . また 有限要素空間 $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ の性質より , D も逆行列を持つとしてよい (例えば [1] による) .

更に , $\delta u_h^{n-1} = \sum_{j=1}^{M} A_j^{n-1} \phi_j$, $K_i^{n-1} = \lambda (f(U^{n-1}) - f(u_h) - f'(u_h) \delta u_h^{n-1}, \phi_i)$ とする . A_j^{n-1}, K_j^{n-1} は区間係数を表す . また , K_j^{n-1} は実際の計算では無限次元の計算を含むため , Θ_h の元として右辺を包み込むように決定される . E を単位行列 , G^{-1} を G の逆行列 , (a_i), (K_j^{n-1}) 等は各成分を並べたベクトルを表わすとすれば , 行列とベクトルを用いて ,

$$(a_j) = (G^{-1} D + \varepsilon E)(c_i - b_i)$$

$$(B_j^n) = -\varepsilon D^{-1} G (A_i^{n-1}) + (G^{-1} + \varepsilon D^{-1})(K_i^{n-1})$$

に対し , δu_h^n は $\sum_{j=1}^{M} (a_j + B_j^n) \phi_j$ として計算機内で決定される .

4　検証例

$\Omega = (0,1) \times (0,1)$ の矩形領域とする . 有限要素空間 S_h は以下のように定める . まず , 区間 $(0, 1)$ を N 等分し , $x_i = i/N$, $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, 2, ..., N)$, $h = 1/N$ とおく . I_i 上一次となる多項式の集合を $P_1(I_i)$ とおき , 有限要素空間 $\mathcal{M}_0^1(x)$ を次で定義する .

$$\mathcal{M}_0^1(x) \equiv \{ \, v \in C(0,1) \, ; \, v|_{I_i} \in P_1(I_i) \, , 1 \leq i \leq N, \, v(0) = v(1) = 0 \, \}.$$

$\mathcal{M}_0^1(x)$ の基底として次の hat function を用いる .

$$\phi_j(x_k) = \begin{cases} 1 \quad (k = j), \\ \\ 0 \quad (k \neq j), \end{cases} \qquad \text{for} \quad 1 \leq j, k \leq N - 1 \, .$$

y 方向にも同様の分割を施し , $\mathcal{M}_0^1(y)$ を定義する . ここで $H_0^1(\Omega)$ の有限要素空間は $S_h \equiv \mathcal{M}_0^1(x) \otimes \mathcal{M}_0^1(y)$ で定義する . また , 定数 C は $1/\pi$ とできることが解っている ([7]) .

前節で述べたプログラムは , 区間演算の性質に注意しながら構成する必要がある . 例えば , K_i^{n-1} の決定で区間計算が必要な項 $(f(\delta u_h^{n-1} + u_h) - f(u_h) - f'(u_h) \delta u_h^{n-1}, \phi_i)$ は Ω の矩形分割された要素の数を L とすると , 各要素 $\Omega_k (k = 1, ..., L)$ 上での評価を次の手法で行うことで決定する .

$K \equiv (f(\delta u_h^{n-1} + u_h) - f(u_h) - f'(u_h) \delta u_h^{n-1}, \phi_i)_{\Omega_k}$ とする . $d \equiv ||\delta u_h^{n-1}||_{L^\infty(\Omega_k)}$ とおくと , $f(t) = (t-1)^+$ の性質より直ちに Ω_k 上で $u_h \geq d + 1, u_h \leq -d + 1$ を満たすところでは $K = 0$ となることが導かれる . 従って K の積分範囲は $u_h = 1$ の部分に幅 d をつけ加えた領域 $\{ x \in \Omega_k \, ; \, -d \leq u_h - 1 \leq d \}$ のみを計算すればよい (図 1 参照) .

また , Fréchet-like 微分の計算 $(\nabla F'(u_h) \phi_k, \nabla \phi_j) = (f'(u_h) \phi_k, \phi_i)$ では , $u_h - 1$ の符号の評価が必要である . 検証例では , S_h が各要素 Ω_k の上で線形であることを用いて , 各要素上の端点の値を調べることで $u_h - 1$ の符号を決定することができる . また , 近似解 u_h が

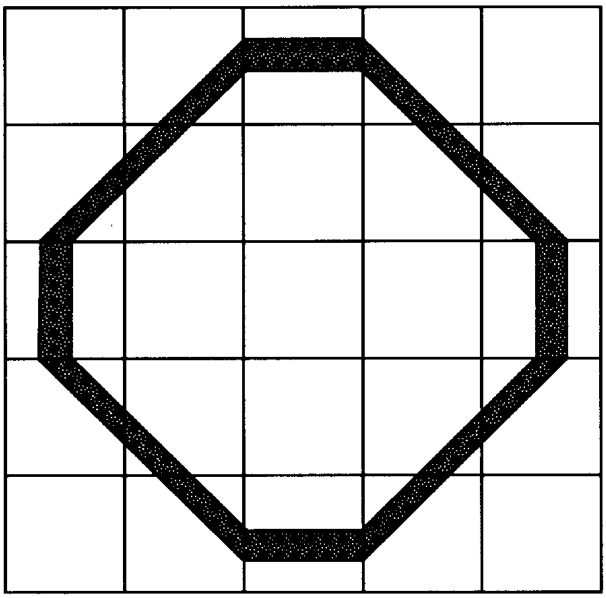

図 1: K の積分領域 ($u_h = 1$ の部分に幅 d をつけ加えた部分)

単調性を持つことより，$\{x \in \Omega\ ;\ u_h(x) = 1\}$ の測度は 0 である．従って，$(f'(u_h)\phi_k, \phi_i)$ などの内積の計算では近似微分 f' の定義で用いた ξ は考慮に入れなくて計算できる．

初期設定は $\delta u_h^0 = [\ 0, 0\ ]$, $\alpha_0 = 0$ とし，inflation のパラメータ δ は $\delta = 10^{-5}$ で検証を行った．

検証例

$\lambda = 34.0898$, 分割数 $N = 120$, S_h の次元 $M = 14161$, 反復数 10, L^2 誤差 $= 0.00029197$.
図 2, 3 は矩形領域 Ω の $y = 0.5$ に沿っての断面図と，$u = 1$ での等高線図を表わす．解は 2 つの曲線で囲まれた領域中に上記 L^2 誤差をつけ加えた集合内に存在する．

参考文献

[1] O.Axelsson and V.A.Barker : Finite Element Solution of Boundary Value Problems , Theory and Computation, Academic Press (1984).

[2] P.G.Ciarlet : The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam (1978).

[3] E.W.Kaucher and W.L.Miranker : Self-Validating Numerics for Function Space Problems, Academic Press, New York (1984).

[4] F.Kikuchi : Finite Element Analysis of a Nondifferentiable Nonlinear Problem Relared MHD equilibria, Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo Sect. IA, Math. 35 (1988), 77—101.

[5] M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems, Japan Journal of Applied Mathematics, 5 (1988), 313—332.

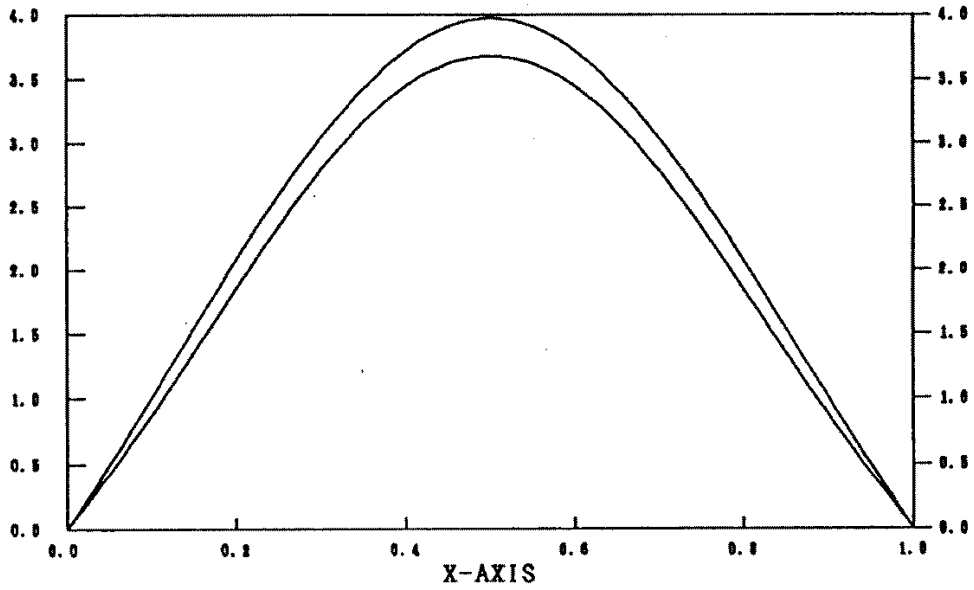

図 2: λ=34.0898 に対する解の形状 ($y = 0.5$ での断面図)

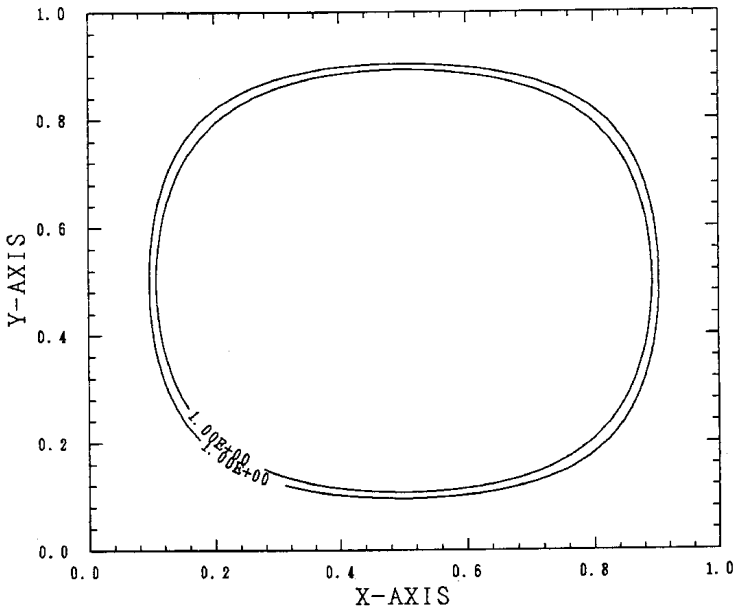

図 3: λ=34.0898 に対する解の形状 ($u = 1$ での等高線図)

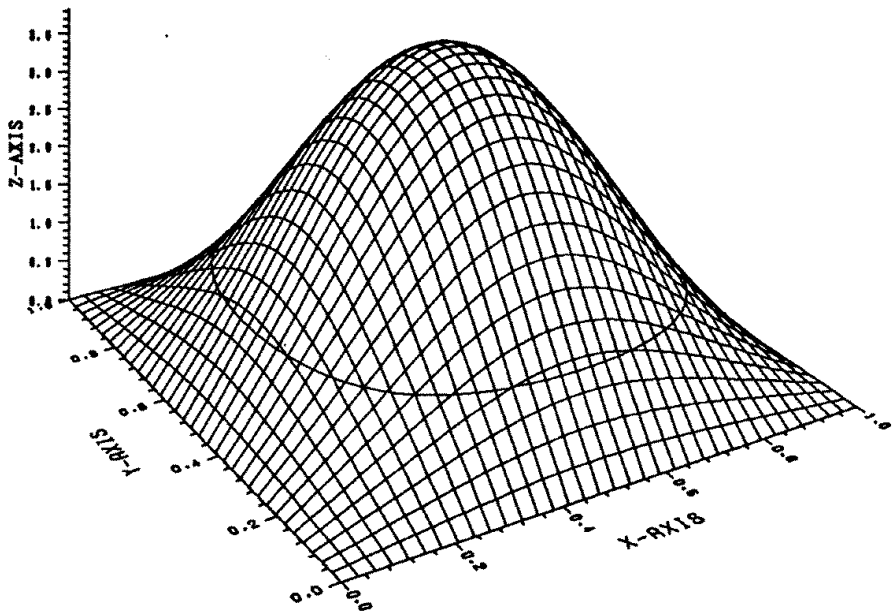

図 4: λ=34.0898 に対する近似解の形状

[6] M.T.Nakao : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems Ⅱ, Japan Journal of Applied Mathematics, 7 (1990), 477—488.

[7] M.T.Nakao : A Computational Verification Method of Existence of Solutions for Nonlinear Elliptic Equations, Lectur Notes in Num. Appl. Anal., 10 (1988), 101—120. In proc. Recent Topics in Nonlinear PDE 4, Kyoto, 1988, North-Holland/Kinokuniya (1989).

[8] M.T.Nakao : A Numerical Verification Method for the Existence of Weak Solutions for Nonlinear Boundary Value Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 164 (1992), 489–507.

[9] E.Zeidler : Nonlinear Functional Analysis and its Applications 1, Springer, NewYork (1986).

[10] Y.Watanabe, M.T.Nakao : Numerical Verifications of Solutions for Nonlinear Elliptic Equations, to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.