Navier-Stokes 方程式の解の数値的検証法について

渡部 善隆[†]　　山本 野人[†]　　中尾 充宏[‡]

[†]九州大学大型計算機センター　　[‡]九州大学大学院数理学研究科　　[‡]九州大学大学院数理学研究科

次の同次境界条件を持つ定常 Navier-Stokes 方程式を考える:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta u+\nabla p &=& -(u\cdot\nabla)u+f & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u &=& 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u &=& 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1}$$

領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の凸多角形，$u=(u_1,u_2)^T$, $f=(f_1,f_2)^T$ は 2 次元ベクトル値関数，$\nu>0$ とする．$H^k(\Omega)$ を通常の k 次 Sobolev 空間とし，$H_0^1(\Omega)\equiv\{v\in H^1(\Omega)\ ;\ v=0 \text{ on } \partial\Omega\}$, $L_0^2(\Omega)\equiv\{v\in L^2(\Omega)\ ;\ (v,1)=0\}$, で定義する．ここで $(\cdot,\cdot)$ は Ω 上の L^2- 内積である．以下，$L^2(\Omega)$-norm を $|v|_0=(v,v)^{1/2}$，$H_0^1(\Omega)$-seminorm を $|v|_1=|\nabla v|_0$ で表す．

有限要素近似解と不動点定式化

$\mathcal{T}_h$ を領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ の三角形または四角形分割，h を $\mathcal{T}_h$ の scale parameter とする．$h>0$ は領域の分割幅を通常表す．また，$X_h\subset H_0^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ を速度場 u の各成分を近似する有限要素部分空間，$Y_h\subset L_0^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ を圧力場 p を近似する有限要素部分空間とする．ここで，(1) の有限要素近似解 $[u_h,p_h]\in X_h^2\times Y_h$ を以下で求める:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \nu(\nabla u_h,\nabla v_h)-(p_h,\operatorname{div} v_h) &=& -((u_h\cdot\nabla)u_h,v_h)+(f,v_h) & \forall v_h\in X_h^2, \\ -(\operatorname{div} u_h,q_h) &=& 0 & \forall q_h\in Y_h. \end{array}\right. \tag{2}$$

X_h, Y_h を適当に選ぶことにより，(2) の解 $[u_h,p_h]$ は $-(u_h\cdot\nabla)u_h+f\in L^2(\Omega)^2$ を右辺とする Stokes 方程式：

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\nu\Delta\bar{u}+\nabla\bar{p} &=& -(u_h\cdot\nabla)u_h+f, \\ \operatorname{div}\bar{u} &=& 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

の有限要素近似解と一致する．従って，$v_0\equiv\bar{u}-u_h$, $p_0\equiv\bar{p}-p_h$, $w\equiv u-\bar{u}$, $r\equiv p-\bar{p}$ とおくと，$u=w+v_0+u_h$ となり，

$$g(w)\equiv -((u_h+v_0+w)\cdot\nabla)(u_h+v_0+w)+(u_h\cdot\nabla)u_h\in H^{-1}(\Omega)$$

に対して (1) の引き戻し形 (residual form)

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta w+\nabla r &=& g(w) & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} w &=& 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ w &=& 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4}$$

を得る．次に，任意の $\xi\in H^{-1}(\Omega)^2$ に対し，Stokes 方程式

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\hat{w}+\nabla\hat{r} &=& \xi & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div}\hat{w} &=& 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \hat{w} &=& 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{5}$$

は一意の解 $\hat{w}\in H_0^1(\Omega)^2$ を持つ．$\xi\in H^{-1}(\Omega)^2$ に対し，$A\xi$ を (5) の解 $\hat{w}$ として定めると，A は $H^{-1}(\Omega)^2$ から $H_0^1(\Omega)^2$ への連続線形写像となる．ここで，$F\equiv Ag$ とおけば，F は $H_0^1(\Omega)^2$ 上の compact map となる．よって，(4) は $H_0^1(\Omega)^2$ 上の不動点問題

$$w=Fw$$

に書き直すことができる．

次に，X_h, Y_h を適当に決めることにより，$\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ に対する Stokes 方程式 (5) の有限要素近似解 $\hat{w}_h \in S_h$ を一意に定めることができる．この対応関係を $A_h : H^{-1}(\Omega)^2 \longrightarrow S_h$ とおき，S_h^* を

$$S_h^* \equiv \{v \in H_0^1(\Omega)^2 \mid v = (A - A_h)f, \quad f \in H^{-1}(\Omega)^2\}$$

で，また product space X を $X \equiv (S_h, S_h^*)$ で定める．この時，X はノルム $|x|_X \equiv \max\{|x_h|_1, |x^*|_1\} \quad x = (x_h, x^*) \in X$ に関して Banach 空間となる．ここで，X から $H_0^1(\Omega)^2$ への線形写像 P： $Px \equiv x_h + x^* \quad x = (x_h, x^*) \in X$ に対し，$G \equiv g \circ P$ とすれば，

$$\tilde{F}x \equiv (A_h Gx, (A - A_h)Gx)$$

は X 上の compact map となる．従って，Schauder の不動点定理より，空でない有界凸閉集合 $W \subset X$ に対し $\tilde{F}W \subset W$ が成り立つならば，$\tilde{F}$ の不動点 x が W 内に存在する．さらに，この不動点 $x = (x_h, x^*) \in X$ に対し，$Px = x_h + x^* \in H_0^1(\Omega)^2$ は F の不動点となる．

Newton-like Method と検証条件

Newton-like operator $N_h : X \longrightarrow S_h$ を

$$N_h x \equiv x_h - [P_1 - A_h \hat{g}'(u_h)]_h^{-1}(x_h - A_h Gx) \qquad x = (x_h, x^*)$$

で定義する．ただし $\hat{g}(w) \equiv -(w \cdot \nabla)w$，$P_1$ は $H_0^1(\Omega)^2$ から X_h^2 への H_0^1-projection である．次に compact operator $T : X \longrightarrow X$ を

$$Tx \equiv (N_h x, (A - A_h)Gx)$$

で定めると，幾つかの仮定のもと，二つの不動点問題 $x = Tx$，$x = \tilde{F}x$ は同値となる．

次に，任意の $v_h \in X_h^2$ は実係数 $\{a_i\}_{1 \le i \le 2n}$ と X_h の基底 $\{\phi_i\}_{1 \le i \le n}$ を用いて

$$v_h = (\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i, \sum_{i=1}^{n} a_{n+i} \phi_i)^T.$$

と表現することができる．ここで $(v_h)_i$ を

$$(v_h)_i \equiv |a_i|$$

と書き，非負な $\{W_i\}_{1 \le i \le 2n+2}$ に対し $W_h \subset S_h$ および $W^* \subset S_h^*$ を

$$\begin{aligned} W_h &\equiv \{w_h \in S_h \mid (w_h)_i \le W_i \quad 1 \le i \le 2n\}, \\ W^* &\equiv \{w_1 + w_2 \in S_h^* \mid w_1, w_2 \in S_h^*, \quad |w_1|_1 \le W_{2n+1}, |w_2|_1 \le W_{2n+2}\} \end{aligned}$$

で定義する．この時，候補者集合 (candidate set)

$$W \equiv (W_h, W^*) \subset X$$

に対し，次の検証条件が成立する:

Theorem

$$\begin{cases} N_h(W) & \subset & W_h \\ (A - A_h)G(W) & \subset & W^* \end{cases} \tag{6}$$

が成立すれば，$\tilde{F}$ の不動点 x が W 内に存在する．

検証条件 (6) を満たす候補者集合 W を計算機内で実現する具体的なアルゴリズムおよび数値例は講演時に示す．