チュートリアル

精度保証付き数値計算 (2) —線形逆作用素のノルム評価

渡部 善隆

1 はじめに

前回は，Banach 空間における無限次元非線形方程式に対する Newton 型不動点定式化について紹介しました．Newton 法は線形操作の重ね合わせで解を求めに行きますので，問題の「とてもよい」近似解における線形化作用素 L の評価が重要な課題となります．今回は，前回，「次回にまわして先に進」んでしまった作用素 L の可逆性判定と，逆作用素 L^{-1} のノルム評価について説明します．また，L^{-1} のノルム評価が無限次元固有値問題における固有値の除外に応用できることを紹介します．主役を務めるのは，Hilbert 空間における直交射影 P_h とその誤差評価定数 $C(h)$ です．

なお，本稿で登場する 3 つの定理の証明は
http://www.cc.kyushu-u.ac.jp/RD/watanabe/
に掲載しています．

2 問題設定

第 1 回の 4 章において，コンパクト作用素による不動点定式化から導かれる線形作用素 L を紹介しました．本稿では，この L の可逆性と L^{-1} のノルム評価に限定して説明します．第 1 回の用語集もあわせて参照してください．

2.1 Hilbert 空間と内積

$\hat{X}, X, Y$ を Hilbert 空間$^{(A3)}$とし，包含関係: $\hat{X} \hookrightarrow X \hookrightarrow Y$ が成り立つとします．また，埋め込み: $\hat{X} \hookrightarrow X$ のコンパクト性を仮定します．Hilbert 空間 X，Y に内積$^{(A1)}$: $(u,v)_X, (u,v)_Y$ と内積から導かれるノルム$^{(A2)}$: $\|u\|_X = \sqrt{(u,u)_X}$, $\|u\|_Y = \sqrt{(u,u)_Y}$ をそれぞれ定義します．また，$X \hookrightarrow Y$ に対して

$$\|u\|_Y \le C_p \|u\|_X, \qquad \forall u \in X \tag{2.1}$$

を満たす定数 $C_p > 0$ が数値的に取れるとします．

2.2 目的

線形作用素 $A : \hat{X} \to Y$，線形連続作用素 $q : X \to Y$ に対し，

$$Lu := Au - qu : \quad \hat{X} \to Y \tag{2.2}$$

が逆作用素 $L^{-1} : Y \to \hat{X}$ を持つことの証明と，

$$\|L^{-1}v\|_X \le M\|v\|_Y, \qquad \forall v \in Y \tag{2.3}$$

を満たす 具体的な$M > 0$ の値を求めることを目的とします．L は，第 1 回の式 (4.1) の方程式: $Au = f(u)$ の線形化作用素に対応しています[†1]．f が Fréchet 微分可能の場合は，適当な近似解 $\hat{u} \in X$ に対して $q = f'[\hat{u}]$ と設定することが一般的です[†2]

2.3 A に対する条件 1: A^{-1} の存在

出発点は作用素 A の可逆性です．方針を簡単に言えば,「A^{-1} のコンパクト性を使って，摂動項 q を

わたなべ よしたか．九州大学情報基盤研究開発センター．

†1 非線形問題から線形作用素が導かれた場合,「線形化 (linearlized)」と表現されます．

†2 q の前にマイナスをつけた理由はそれだけです．

押さえ込む」です．任意の $\phi \in Y$ に対して $A\psi = \phi$ は一意の解 $\psi \in \hat{X}$ を持つと仮定し，この対応関係を $A^{-1} : Y \to \hat{X}$ で表します．また, 作用素 A^{-1} に連続性を仮定します．次に, 埋め込み作用素 $I_{\hat{X} \hookrightarrow X}$ と A^{-1} との合成写像: $I_{\hat{X} \hookrightarrow X} \circ A^{-1} : Y \to X$ を改めて $A^{-1} : Y \to X$ と置き直します．要素の対応は以下の通りです．

$$\begin{array}{ccccc} Y & \to & \hat{X} & \hookrightarrow & X \\ \phi & \mapsto & \psi & \mapsto & \psi \end{array}$$

A^{-1} の値域が，$\hat{X}$ ではなく広い空間である X まで拡大されていることに注意してください．線形作用素 A^{-1} の連続性すなわち有界性と埋め込み: $\hat{X} \hookrightarrow X$ のコンパクト性より，A^{-1} は Y から X へのコンパクト作用素となります．

2.4 A に対する条件 2: 内積表現

次に，X の内積 $(\cdot,\cdot)_X$ と Y の内積 $(\cdot,\cdot)_Y$ に対して，

$$(u, v)_X = (Au, v)_Y, \quad \forall u \in \hat{X},\ \forall v \in X \tag{2.4}$$

の成立を仮定します．式 (2.4) は，直交射影を用いた定式化で必要不可欠な条件です[†3]．微分方程式の場合, 条件 (2.4) は, $(Au, v)_Y$ が部分積分によって X の内積で表現できる，つまり，有限要素法の用語で言えば「弱定式化できる」ことに対応します．

3 有限次元部分空間と基底

この章では，コンピュータで取り扱うことが可能な X の有限次元部分空間を導入し，定理で用いる行列を定義します．

3.1 有限次元部分空間 X_h

X の有限次元部分空間を X_h，X_h の次元を N で表記します．$\{\phi_i\}_{1\le i\le N}$ を X_h の基底とします．

X_h の下添字 “h” は，X_h の X に対する近似度を表す正のパラメータです．例えば，領域の有限要素メッシュ幅や，未知関数の有限級数展開の最大項数の逆数などが h となります．$h \to 0$ が理想です．

†3 この条件がないと，有限次元の行列が作成できません．

3.2 X_h の要素のベクトル表現

任意の $v_h \in X_h$ は，基底 $\{\phi_i\}_{1\le i\le N}$ を用いて複素係数 $\{v_i\}_{1\le i\le N}$ との一次結合の形で

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i \tag{3.1}$$

と一意に表現できます．したがって，基底の一次独立性より，係数を並べたベクトル:

$$\boldsymbol{v} = [v_i] := [v_1, v_2, \ldots, v_N]^T \in \mathbb{C}^N \tag{3.2}$$

を決定することができれば，$v_h \in X_h$ が定まります．ここで，T は転置記号です．

3.3 行列の定義

X, Y の内積, X_h の基底 $\{\phi_i\}_{1\le i\le N}$, および q によって構成される $N \times N$ 行列を，3 つ定義します．

$$[D_1]_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_X, \tag{3.3}$$

$$[D_2]_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_Y, \tag{3.4}$$

$$[G]_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_X - (q\phi_j, \phi_i)_Y. \tag{3.5}$$

ここで，“$[D]_{ij}$” は行列 D の i 行 j 列成分だとします．D_1, D_2 は Hermite 正定値行列[†4]ですので，Cholesky 分解可能です．各行列分解による下三角行列 L_1, L_2 を

$$D_k = L_k L_k^H, \quad k = 1, 2 \tag{3.6}$$

で定義します．ここで，H は共役転置記号です．行列の分解は，式 (3.6) の形になるならば必ずしも Cholesky 分解でなくても構いません．一方，行列 G の性質は q に依存します．

$$(q\phi_j, \phi_i)_Y = (\phi_j, q\phi_i)_Y, \qquad 1 \le i, j \le N$$

ならば Hermite 性が保証されます．しかし，一般には非 Hermite 行列です．また，各行列のスパース性は，基底 ϕ_i によって決まります．例えば有限要素基底ならば，積分が部分領域に制限され疎行列になりますし，内積で直交する基底を導入すると，D_k（のどれか）が対角行列になっても，G が密行列になる場合もあります．

†4 実 Banach 空間の場合は実対称正定値行列です．

3.4 行列とノルムの関係

X_h の任意の要素 v_h を

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i, \quad \boldsymbol{v} = [v_i] \in \mathbb{C}^N$$

と表記するとき，先に定義した行列を用いて

$$\begin{aligned}\|v_h\|_X^2 &= (\, v_h, v_h \,)_X = \boldsymbol{v}^H D_1 \boldsymbol{v} \\ &= (L_1^H \boldsymbol{v})^H (L_1^H \boldsymbol{v}) = \|L_1^H \boldsymbol{v}\|_2^2,\end{aligned}$$

すなわち $\|v_h\|_X = \|L_1^H \boldsymbol{v}\|_2$ が成立します．ここで，$\|\cdot\|_2$ はベクトルの 2-ノルム（ Euclid ノルム）です．同様に，$\|v_h\|_Y = \|L_2^H \boldsymbol{v}\|_2$ も成立します．定理の証明では，この関係を最終局面で使います．

4 直交射影と構成的誤差評価

この章では，直交射影と射影誤差を準備します．これらは次回でも重要な役目を果たします．

4.1 直交射影 P_h

Hilbert 空間 X の有限次元部分空間 X_h は閉部分空間です．よって内積 $(\cdot,\cdot)_X$ に対する直交補空間を

$$X_h^{\perp} := \{u_* \in X \mid (\, u_*, v_h \,)_X = 0,\ \forall v_h \in X_h\} \tag{4.1}$$

と定めることで，射影定理$^{(A4)}$ より，任意の $u \in X$ は

$$u = u_h + u_*, \qquad u_h \in X_h, \quad u_* \in X_h^{\perp}$$

と一意に分解可能です．したがって, X の内積 $(\cdot,\cdot)_X$ に対して X の元を X_h の元に対応させる直交射影 $^{(A4)} P_h : X \to X_h$ が

$$(\, u - P_h u, v_h \,)_X = 0, \qquad \forall v_h \in X_h \tag{4.2}$$

で定義できます．また，式 (4.1) で定義された直交補空間 $X_h^{\perp}$ は，P_h の無限次元部分誤差集合として

$$X_h^{\perp} = \{u_* \in X \mid u_* = (I - P_h)u,\ u \in X\}$$

と表記することもできます．ここで，I は X 上の恒等作用素です．

以上より，任意の X の要素 u は，内積 $(\cdot,\cdot)_X$ に対する直交射影 P_h によって，コンピュータで取り扱い可能な有限次元 X_h の要素とその誤差の形に

$$u = \underbrace{P_h u}_{\text{有限次元}} + \underbrace{(I - P_h)u}_{P_h\text{の誤差}}$$

と一意に分解されることがわかました†5.

4.2 P_h の誤差評価

前節で導入した直交射影 P_h に対し，h に依存する具体的な数値が算定可能な $C(h) > 0$ が存在し，

$$\|(I - P_h)v\|_X \le C(h)\|Av\|_Y, \quad \forall v \in \hat{X} \tag{4.3}$$

を満たすことを仮定します．$C(h)$ は，オーダーが h という意味ではなく,「$h \to 0$ に依存して $C(h) \to 0$ を期待する」ことを強調する意味でこのように表記しています．X_h を固定して考えれば $C(h)$ は正定数です．

評価式 (4.3) は，有限次元と無限次元をつなぐ架け橋であり，$C(h)$ の算定方法（構成的誤差評価）それ自身が大切な研究テーマです．詳細は文献 [1]（ 4.2 節）を参照してください．

4.3 P_h と A^{-1} と $C(h)$ の関係

ここで, 式 (4.3) の意味を $\phi \in Y$ に対する方程式:

$$Av = \phi \tag{4.4}$$

から考えます．A に対する条件 1 より，式 (4.4) を満たす $v \in \hat{X}$ が存在します．この v に対する直交射影 $P_h v$ を考えれば, 定義 (4.2) と条件 (2.4) より，

$$(\, P_h v, v_h \,)_X = (\, \phi, v_h \,)_Y, \quad \forall v_h \in X_h \tag{4.5}$$

が成立します．次に，式 (4.5) を基底を使って書き下します．式 (4.5) の中の " $\forall v_h \in X_h$" は，N 個の基底すべてに対する成立条件に置き換えることができます．よって，ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{d}$ を

$$P_h v = \sum_{i=1}^{N} v_i \phi_i, \quad \boldsymbol{v} = [v_i] \in \mathbb{C}^N,$$

†5 Hilbert 空間における射影定理の重要性をお伝えしたいがため，この節はややくどい記述になってしまいました.

$$\boldsymbol{d} = [d_j], \quad d_j = (\phi, \phi_j)_Y, \quad 1 \le j \le N$$

とおけば，$P_h v$ は有限次元の線形操作:

$$\boldsymbol{v} = D_1^{-1}\boldsymbol{d} \tag{4.6}$$

により決定できます．また，v と $P_h v$ の誤差は，$\phi \in Y$ のノルム: $\|\phi\|_Y$ が計算できるならば，式 (4.3), (4.4) より定量的に，

$$\|(I - P_h)v\|_X \le C(h)\|\phi\|_Y$$

で評価できます．以上をまとめます．

1） $\phi \in Y$ の形が具体的に表現できたとしても，方程式 (4.4) の解 v を具体的に表現することは一般に難しい．

2） ただし，直交射影 $P_h v \in X_h$ の係数ベクトルは式 (4.6) を用いて決定することができる．

3） v と $P_h v$ との誤差の表現も一般に難しい．しかし，$\|\phi\|_Y$ を用いたノルム評価は可能．

次章から紹介する定理では，この性質を用いて，「$P_h v$ が現れたら基底で展開し，$(I - P_h)v$ が出てきたら $C(h)$ を用いてノルムで押さえる」という手順を繰り返すことにより得られます．

4.4 q の条件

直交射影 P_h と線形連続作用素 $q : X \to Y$ に対し，具体的な値が算定可能な $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ge 0$ が存在して，次を満たすとします．

$$\|P_h A^{-1} q w_*\|_X \le \nu_1 \|w_*\|_X, \ \forall w_* \in X_h^\perp, \tag{4.7}$$

$$\|qw\|_Y \le \nu_2 \|P_h w\|_X + \nu_3 \|(I - P_h)w\|_X, \ \forall w \in X. \tag{4.8}$$

$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ge 0$ は q に応じて算定する必要があり，$C(h)$ や C_p が含まれることがあります．必ず算定できるという保証はありません，しかし，q の線形性を用いて頑張ってひねり出す必要があります [2]．

5 線形化作用素の可逆性

以上の準備のもと，L の可逆性判定条件を導くことができます．

定理 5.1 $N \times N$ 行列の *2*-ノルム:

$$\rho := \|L_1^H G^{-1} L_1\|_2 \tag{5.1}$$

に対し，

$$\kappa := C(h)(\rho\nu_1\nu_2 + \nu_3) < 1 \tag{5.2}$$

が成立すれば，L は可逆.

証明では，A^{-1} を用いて X 上の作用素:

$$\tilde{L}w := w - A^{-1}qw \tag{5.3}$$

を導入し $\tilde{L}$ の可逆性を確認に行きます．そのために，Fredholm の交代定理$^{(A5)}$ を用いて $\tilde{L}w = 0$ を満たすものは自明解である $w = 0$ のみであることを示します．ρ, ν_1 は P_h の評価で，ν_2, ν_3 は $I - P_h$ の評価でそれぞれ必要になります．

条件 (5.2) は，$h \to 0$ に取りさえすれば必ず成立するように見えます．しかし，必ずしもそうではありません．L が可逆でない場合は，行列 G が特異またはほとんど特異な行列になり，結果として ρ を求めることができなくなります．また，例えば非線形性の強い問題では，ν_i の値が大きくなり，$C(h)$ での押さえ込みが効かなくなることもあります．

さらに，行列の 2-ノルム（スペクトルノルム）(5.1) は数学的に厳密な上界を与える必要があります．これらの精度保証付き数値計算については，稿を改めて説明します．

定理 5.1 は，たとえば，重調和型方程式に対する直交基底展開による定式化の場合，行列 $L_1^H G^{-1} L_1$ を若干修正する必要があります [3]．しかし，証明はほぼ同じです．

6 L^{-1} のノルム評価

この章では，L^{-1} のノルム評価方法を 2 つ紹介し，具体的な問題で比較してみます．

6.1 可逆性条件を用いたノルム評価

以下は，L の可逆性条件 (5.2) から直ちに得られる M の評価方法です．

定理 6.1 条件 (5.2) のもと，式 (2.3) を満たす $M>0$ は 2×2 実行列:

$$\mathcal{M}=\begin{bmatrix}\rho\left(1+\dfrac{\nu_1 C(h)\nu_2\rho}{1-\kappa}\right) & \dfrac{\rho\nu_1}{1-\kappa}\\ \dfrac{C(h)\nu_2\rho}{1-\kappa} & \dfrac{1}{1-\kappa}\end{bmatrix}$$

に対して，

$$M=C_p\|\mathcal{M}\|_2 \tag{6.1}$$

で定まる．

定理 6.1 の証明では，式 (5.3) で定義した $\tilde{L}^{-1}$ のノルム評価:

$$\|\tilde{L}^{-1}\phi\|_X\le\tilde{M}\|\phi\|_X,\quad\forall\phi\in X \tag{6.2}$$

を満たす $\tilde{M}>0$ が $\tilde{M}=\|\mathcal{M}\|_2$ と一致することを導き，式 (2.1) を用いて M の評価を得ます．$\|\mathcal{M}\|_2$ は 2×2 行列ですので，可逆性条件のための計算が完了さえしていれば，瞬時に M が求まります．

定理 6.1 において，もし，$h\to 0$ にしたがって $\kappa, C(h), \nu_1\to 0$ になると仮定すれば，

$$\|\mathcal{M}\|_2\to\max\{\rho,1\}$$

となります．これは，式 (6.1) が与える M の値が，理想的な状況においても，C_p より小さくなることはないということを意味します．

6.2 L^{-1} のノルムの直接評価

次に，式 (6.2) を経由せずに，$M>0$ を直接評価する方法を紹介します．

定理 6.2 L の可逆性成立条件 (5.2) のもと，行列の *2*-ノルム:

$$\hat{\rho}:=\|L_1^H G^{-1}L_2\|_2 \tag{6.3}$$

に対し，

$$\hat{\kappa}:=C(h)\nu_3(1+\hat{\rho}\nu_2)<1 \tag{6.4}$$

が成り立つとき，式 (2.3) を満たす $M>0$ は

$$M=\frac{\sqrt{\hat{\rho}^2+C(h)^2(1+\nu_2\hat{\rho})^2}}{1-\hat{\kappa}} \tag{6.5}$$

に取ることができる．

定理 6.2 の証明では，L の可逆性より，任意の $\phi\in Y$ に対して $A\psi=q\psi+\phi$ を満たす $\psi\in\hat{X}$ が取れることを用い，ψ を分解したノルム: $\|P_h\psi\|_X$, $\|(I-P_h)\psi\|_X$ を $\|\phi\|_Y$ で評価することにより式 (6.5) を導きます．

式 (6.5) において，$\hat{\kappa}, C(h)\to 0$ $(h\to 0)$ を仮定すれば，$M\to\hat{\rho}$ となります．したがって定理 6.1 と比較すると，評価 (6.5) は下限 C_p の制限がないという利点をもちます．もちろん，式 (6.3) の $\hat{\rho}$ を得るためには，2-ノルムの追加計算が必要になります．また，条件 (6.4) が条件 (5.2) より容易に確認できるという保証はありません．

6.3 M の評価方法の比較

表 1 は，2 次元単位正方領域における Emden 方程式を Legendre 多項式基底で離散化した X_h に対して得られた式 (6.1), (6.5) と $\rho, \hat{\rho}$ の値です [4]．N は一次元方向の多項式次数です．表 2 は，Orr-Sommerfeld 方程式に対する固有値の除外法において，$a=1.019$, $R=5776$, $\mu_1=-200+1552.59i$, $\mu_2=-500+1552.59i$ に対する評価です [5]．区間 $[-1,1]$ を N 等分し 3 次 Hermite 関数で基底を構成しています．“—” は定理の条件が満たされなかったことを意味します．ともに倍精度区間演算で計算を行いました． 表 1 では，$N=24$ で式 (6.5)

表 1 Emden 方程式での逆作用素評価

N	$C_p\|\mathcal{M}\|_2$	M	ρ	$\hat{\rho}$
8	—	—	2.74009	0.37933
16	6.45302	0.72551	2.74682	0.37993
24	1.64421	0.50325	2.74719	0.37994

表 2 Orr-Sommerfeld 方程式での逆作用素評価

	μ_1		μ_2	
N	$C_p\|\mathcal{M}\|_2$	M	$C_p\|\mathcal{M}\|_2$	M
100	3.18150	—	0.65923	—
200	0.81998	—	0.33547	—
300	0.81083	—	0.31211	0.03154
400	1.05682	—	0.37679	0.01121
500	2.04840	0.04698	0.68267	0.00864

が式 (6.1) に比べて 1/3 程度のよい値を得ています．表 2 では，可逆性を確認する条件 $\kappa < 1$ に比べ，$\hat{\kappa} < 1$ を得るためにはより分割を細かくする必要があることがわかります．ただ，N を大きくすると丸め誤差の影響から $C_p\|\mathcal{M}\|_2$ の評価が悪くなるのに比べ，反対に式 (6.5) は，$\hat{\kappa} < 1$ さえみたせば，格段によい評価を与えることがわかります．

したがって，逆作用素のノルム評価は，与えられた問題と近似空間 X_h，特に $h > 0$ に依存して適切に選択する必要があります．

7 応用例: 固有値の非存在証明

線形作用素の可逆性と逆作用素ノルム評価の応用例を紹介します [5]．線形作用素 $B : X \to Y$ が

$$\|Bu\|_Y \le C_b\|u\|_X, \qquad \forall u \in X$$

を満たすとして，固有値問題:

$$(A - q)u = \lambda Bu \tag{7.1}$$

を考えます．A, q はこれまでの作用素と同じです．固有値の除外候補点 $\mu \in \mathbb{C}$ を用いて式 (7.1) をシフトした問題:

$$Lu = (\lambda - \mu)Bu \tag{7.2}$$

に対し，$Lu := (A - q - \mu)u$ の可逆性の確認とノルム評価 (2.3) が得られるならば，問題 (7.1) の固有値は μ を中心とした半径 $1/(C_bM)$ の複素円内には 存在しない ということを導くことができます．図 1 は Dirichlet 境界条件を課した 2 次元非自己共役固有値問題に対する固有値の除外結果です．それぞれの円は与えられた μ に対して得られた除外領域に対応しています．図中の 3 つの点は近似固有値をプロットしたものです．

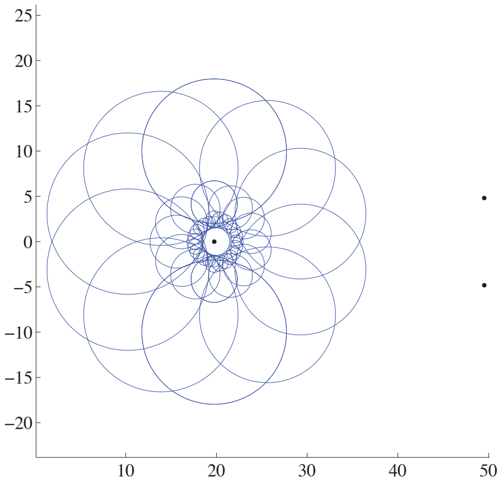

図 1 固有値の非存在領域

8 おわりに

今回は，コンパクト作用素と射影誤差定数を用いた線形作用素のノルム評価を紹介しました．ここに紹介した手法の他にも，L^{-1} の評価方法として，例えば，大石 [6]，Heywood[7]，Plum[8] などの方法があります．特に Plum の方法は，コンパクト性の議論が使えない非有界領域上の作用素にも適用可能であり，射影誤差 P_h を用いた評価も必要ないという特長を持ちます†6．

次回は，L^{-1} の直接評価を回避する中尾理論について紹介したいと思います．

参 考 文 献

†6 とりあえず良いとこだけを書いておきましょう．

[1] 田端 正久, 中尾 充宏, 偏微分方程式から数値シミュレーションへ／計算の信頼性評価—数値解析の新たな切り口, 講談社, 2008.
[2] M.T. Nakao, and Y. Watanabe, Numerical verification methods for solutions of semilinear elliptic boundary value problems, *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, vol. 2, no. 1, pp. 2–31, January, 2011.
[3] Y. Watanabe, A computer-assisted proof for the Kolmogorov flows of incompressible viscous fluid, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 223, no. 2, pp. 953–966, January, 2009.
[4] 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏, 楕円型作用素の逆作用素の作用素ノルムの評価の改良について, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会, 応用数学分科会, 講演アブストラクト, pp. 88–91, September, 2009.
[5] Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, and M.T. Nakao, A computer-assisted stability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, vol. 2, no. 1, pp. 123–127, January, 2011.
[6] 大石 進一, 非線形解析入門, コロナ社, 1997.
[7] J. G. Heywood, W. Nagata, and W. Xie, A numerically based existence theorem for the Navier-Stokes equations, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, vol. 1, no. 1, pp. 5–23, April, 1999.
[8] M. Plum, Computer-assisted proofs for semilinear elliptic boundary value problems, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, vol. 26, no. 2-3, pp. 419–442, October, 2009.

A 付録: 用語集

本稿に登場した関数解析で用いられる用語を簡単に説明します.

A1 内積

線形空間 X に対し $X \times X$ から $\mathbb{C}$ への写像:

$$[u,v] \in X \times X \mapsto (u,v)_X \in \mathbb{C}$$

が任意の $u, v \in X$ および $a \in \mathbb{C}$ に対し

- $(u,v)_X = \overline{(v,u)_X}$
- $(au,v)_X = a(u,v)_X$
- $(u+v,w)_X = (u,w)_X + (v,w)_X$
- $(u,u)_X \geq 0$
- $(u,u)_X = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$

を満たすとき，内積であるといいます．内積が定義されている線形空間を内積空間と呼びます.

内積空間 X において $(u,v)_X = 0$ となるとき，u と v は直交するといいます．直交性を持つ要素は，内積から導かれるノルム (A2) に対して $\|u+v\|_X^2 = \|u\|_X^2 + \|v\|_X^2$ が成立することから，歓迎されます.

A2 内積とノルムの関係

内積空間 X において

$$\|u\|_X := \sqrt{(u,u)_X} \tag{8.1}$$

とすると，$\|u\|_X$ は X のノルムとなります．また $\|\cdot\|_X$ を X の内積から導かれるノルムと呼ぶことがあります.

A3 Hilbert 空間

内積空間 X が内積から定義されるノルム (8.1) に関して完備，すなわち Banach 空間であるとき，X を Hilbert 空間と呼びます．Hilbert 空間は Banach 空間の一種です．有限次元の Euclid 空間も Hilbert 空間です.

A4 射影定理

U を Hilbert 空間 X の閉部分空間とするとき，X の内積 $(\cdot,\cdot)_X$ に対し，X の任意の要素 u は U の要素と $U^\perp$ の要素の和:

$$u = u_1 + u_2, \qquad u_1 \in U,\ u_2 \in U^\perp$$

に一意に分解されます．ここで,

$$U^\perp := \{u \in X \mid (u,v)_X = 0,\ \forall v \in U\}$$

は U の直交補空間と呼ばれます．この分解を直和分解または直交分解と呼びます．また，u から u_1 への対応を直交射影あるいは射影といいます．文献によっては u_1, u_2 を直交射影と呼ぶ場合もあります.

A5 Fredholm の交代定理

T を Banach 空間 X 上のコンパクト作用素とします．この時，任意のゼロでない $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，次の何れかが成立します.

1） 方程式: $Tu - \lambda u = 0$ は非ゼロの解 u を持つ.
2） 方程式: $Tu - \lambda u = f$ は任意の $f \in X$ に対して唯一の解 u を持つ.

Riesz-Schauder の交代定理とも呼ばれます.