

チュートリアル

精度保証付き数値計算 (3)

—中尾理論入門

渡部 善隆

1 はじめに

今回は、逆作用素 L^{-1} の直接の取り扱いを巧みに回避する中尾理論について説明します。主役を務めるのは、第 2 回と同じく、Hilbert 空間における直交射影 P_h とその誤差評価定数 $C(h)$ です。

今回は、逆作用素 L^{-1} の直接の取り扱いを巧みに回避する中尾理論について説明します。主役を務めるのは、第 2 回と同じく、Hilbert 空間における直交射影 P_h とその誤差評価定数 $C(h)$ です。

2 問題設定と不動点定式化

今回必要な関数空間・作用素・行列は、第 1 回・第 2 回でほぼ出そろっています。用語集もあわせて適宜参照してください。

2.1 目的

\hat{X}, X, Y を包含関係: $\hat{X} \hookrightarrow X \hookrightarrow Y$ を満たす Hilbert 空間とし、埋め込み: $\hat{X} \hookrightarrow X$ のコンパクト性を仮定します。次に、連続作用素 $f: X \rightarrow Y$ と線形作用素 $A: \hat{X} \rightarrow Y$ を導入します。また、 f は X の有界集合を Y の有界集合に移すとし、 f の微分可能性は必ずしも必要ありません。

以上の準備のもと、次の方程式の解 u を求める問題を考えます。

$$Au = f(u). \quad (2.1)$$

わたなべ よしたか。九州大学情報基盤研究開発センター。

式 (2.1) は第 1 回の 4.1 節の非線形方程式とほぼ同じものです。

2.2 A に対する条件と不動点定式化

任意の $\phi \in Y$ に対して $A\psi = \phi$ は一意の解 $\psi \in \hat{X}$ を持つと仮定し、この対応関係を $A^{-1}: Y \rightarrow \hat{X}$ で表します。また、作用素 A^{-1} に連続性を仮定します。次に、埋め込み作用素 $I_{\hat{X} \hookrightarrow X}$ と A^{-1} との合成写像: $I_{\hat{X} \hookrightarrow X} \circ A^{-1}: Y \rightarrow X$ を改めて $A^{-1}: Y \rightarrow X$ と置き直します。また、 X の内積 $(\cdot, \cdot)_X$ と Y の内積 $(\cdot, \cdot)_Y$ に対して、

$$(u, v)_X = (Au, v)_Y, \quad \forall u \in \hat{X}, \forall v \in X \quad (2.2)$$

の成立を仮定します。こちらは第 2 回の 2.4 節と同じ仮定です。この時、 A^{-1} と f の合成写像を

$$F := A^{-1} \circ f: X \rightarrow X \quad (2.3)$$

と定義すると、方程式 (2.1) は X 上の不動点問題:

$$u = F(u) \quad (2.4)$$

に書き直すことができます。またその作り方より、 F はコンパクト作用素です。したがって、Schauder の不動点定理より、空でない有界凸閉集合 $U \subset X$ に対する包含関係:

$$F(U) \subset U \quad (2.5)$$

を確認することができれば、 U の中に F の不動点の存在を保証することができます。

3 有限次元部分空間と直交射影

この章では, コンピュータで取り扱うことが可能な X の有限次元部分空間を導入し, 精度保証で必要になる定数と行列を定義します.

3.1 有限次元部分空間 X_h

X の有限次元部分空間を X_h , X_h の次元を N で表記します. $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N}$ を X_h の基底とします.

3.2 行列の定義

X, Y の内積: $(\cdot, \cdot)_X, (\cdot, \cdot)_Y$, X_h の基底 $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N}$, および線形作用素 $q: X \rightarrow Y$ により構成される $N \times N$ 複素行列 D, G を, $1 \leq i, j \leq N$ に対し

$$[D]_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_X, \quad (3.1)$$

$$[G]_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_X - (q\phi_j, \phi_i)_Y \quad (3.2)$$

で定義します. 通常 q は, 問題 (2.1) の近似解 u_h における f の Fréchet 微分または Fréchet 微分に近いものとして選択されます. 後に見ていくように, 行列 G は Newton 型作用素の行列表現となります. D は第 2 回の D_1 と同じ行列です^{†1}.

3.3 直交射影と構成的誤差評価

X の内積に対し, X の元を X_h の元に対応させる直交射影 $P_h: X \rightarrow X_h$ を

$$(u - P_h u, v_h)_X = 0, \quad \forall v_h \in X_h \quad (3.3)$$

で定義します. さらに直交射影 P_h に対し, h に依存する具体的な数値が算定可能な $C(h) > 0$ が存在し,

$$\|(I - P_h)v\|_X \leq C(h)\|Av\|_Y, \quad \forall v \in \hat{X} \quad (3.4)$$

を満たすことを仮定します. 第 2 回と同じく, 評価式 (3.4) が有限次元と無限次元をつなぐ架け橋です.

4 解の検証手法 [基本型]

この章では, 不動点問題 $u = F(u)$ の解の検証手法の基本的な手順を説明します. この原理は, 1988

^{†1} D_2 は今回登場しないため, 下添字を取りました.

年に線形楕円型境界値問題に対する検証方式として本学会論文誌において提案されたものです [1]^{†2}.

4.1 不動点問題の分解

式 (3.3) で定義される直交射影 P_h を用いて, X の不動点方程式 $u = F(u)$ は有限次元 X_h 部分と無限次元の誤差に対応する X_h^\perp 部分に

$$\begin{cases} P_h u = P_h F(u), \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F(u), \end{cases} \quad (4.1)$$

と一意に分解されます. 分解された有限次元および無限次元部分それぞれについて候補者集合を設定し, F を作用させた後の包含関係を調べます.

4.2 近似解 u_h

問題 (2.1) の近似解を $u_h \in X_h$ とします. 解を X で探しますので, 必ずしも $u_h \in \hat{X}$ である必要はありません. 具体的には, A に対する条件を用いて,

$$(u_h, v_h)_X = (f(u_h), v_h)_Y, \quad \forall v_h \in X_h \quad (4.2)$$

を満たす u_h を計算します. ただし, 厳密に有限次元方程式 (4.2) の解を与える必要は (本稿では) なく, Newton-Raphson 法などによる「近似」で構いません^{†3}.

4.3 候補者集合と検証条件

近似解 $u_h \in X_h$ の周りで, 解を包含することが期待される候補者集合 $U \subset X$ を,

$$U = u_h + U_h + U_*, \quad U_h \subset X_h, \quad U_* \subset X_h^\perp \quad (4.3)$$

と選びます. X_h^\perp は内積 $(\cdot, \cdot)_X$ に対する X_h の直交補空間です. U_h, U_* は, 近似解 u_h と真の解の「ずれ」を包含することが期待される集合です. Schauder

^{†2} 文献 [4] では, 着想にいたるまでの御本人の解説がなされています. 電子情報通信学会 Web にて無料配信中です.

^{†3} 検証手法によっては u_h が式 (4.2) の厳密な解であることを要請する場合もあります.

の不動点定理が適用できるように, U は有界凸閉集合になるように作ります. この時, 次が言えます.

補題 4.1 式 (4.3) で定めた候補者集合 U に対し, $F(U) \subset U$ が成立するための十分条件は,

$$\begin{cases} P_h F(U) - u_h \subset U_h, \\ (I - P_h)F(U) \subset U_*. \end{cases} \quad (4.4)$$

証明: 任意の $u \in U$ に対し, 条件 (4.4) より $P_h F(u) \in u_h + U_h$ かつ $(I - P_h)F(u) \in U_*$. したがって,

$$\begin{aligned} F(u) &= P_h F(u) + (I - P_h)F(u) \\ &\in u_h + U_h + U_* = U \end{aligned}$$

となり, $u \in F(U)$ が成り立つ. \square

4.4 式 (4.4) の意味

補題 4.1 より, 問題は直交射影 P_h によって分けられた有限次元部分と無限次元部分それぞれに対する包含関係の確認に持ち込まれました. 式 (4.4) を眺めると, 第 1 式の左辺は近似解 u_h の残差に, 第 2 式の左辺は $F(U)$ に対する射影 P_h の誤差にそれぞれ対応するため, 「成り立たないことはないかも」と思っていただけではないでしょうか.

さらに, 有限次元部分と無限次元部分ごとに, 式 (4.4) の成立条件を見ていきます.

4.5 無限次元部分の成立条件

次の定理は, 候補者集合の無限次元部分の構成と縮小のための条件を与えます.

定理 4.1 式 (4.3) の候補者集合 U の無限次元部分 U_* を半径 $\alpha > 0$ の X の球として

$$U_* = \{ u_* \in X_h^\perp \mid \|u_*\|_X \leq \alpha \} \quad (4.5)$$

で定めるとき,

$$C(h) \sup_{u \in U} \|f(u)\|_Y \leq \alpha \quad (4.6)$$

が成立すれば, 式 (4.4) の後半: $(I - P_h)F(U) \subset U_*$ が満たされる.

証明: 各 $u \in U$ に対し, 式 (3.4) と F の定義 (2.3) と条件 (4.6) より,

$$\begin{aligned} \|(I - P_h)F(u)\|_X &\leq C(h) \|AF(u)\|_Y \\ &= C(h) \|f(u)\|_Y \leq \alpha. \end{aligned}$$

よって $(I - P_h)F(u) \in U_*$ となり, 結論を得る. \square

U_* は, 式 (4.5) の通り, 中心ゼロ, 半径 α の球として取りました. その作り方から空でない有界凸閉集合です. 条件 (4.6) には構成的誤差評価定数 $C(h)$ がかかっています. したがって, もし $C(h)$ が十分小さく取れるならば, 不等式の成立が期待できます^{†4}.

4.6 有限次元部分の成立条件

次に, 候補者集合の有限次元部分の構成と縮小のための条件を導きます. 有限次元部分の $U_h \subset X_h$ は, 複素凸閉集合 $\{B_i\}_{1 \leq i \leq N}$ と基底との 1 次結合で

$$U_h = \sum_{i=1}^N B_i \phi_i \quad (4.7)$$

と設定します. 問題が実 Banach 空間の場合には B_i を上端と下端を持つ閉区間に設定します. 複素 Banach 空間の場合には実部・虚部が閉区間となるように B_i を定義するか, 中心と半径で表現される閉円板に設定します. この時, U_h は, 各 $1 \leq i \leq N$ に対し B_i に属するすべての複素数と基底 ϕ_i との

^{†4} 実際の計算においてどれくらい小さな $C(h)$ を設定することができるかは, 問題と導入する X_h に依存します.

1 次結合全体の関数集合として, すなわち,

$$U_h = \left\{ \sum_{i=1}^N v_i \phi_i \in X_h \mid v_i \in B_i \subset \mathbb{C}, 1 \leq i \leq N \right\} \quad (4.8)$$

と表現することができます. その作り方から U_h は有界凸閉集合です. また, 次の成立条件を示すことができます.

定理 4.2 式 (4.5), (4.7), (4.3) より構成される候補者集合 $U \subset X$ に対し, $\mathbf{d} = [d_i] \subset \mathbb{C}^N$ を, $1 \leq i \leq N$ で

$$d_i = \{ (f(u), \phi_i)_Y - (u_h, \phi_i)_X \in \mathbb{C} \mid u \in U \} \quad (4.9)$$

と定める. このとき,

$$\mathbf{x} = \{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N \mid \hat{\mathbf{x}} = D^{-1} \hat{\mathbf{d}}, \forall \hat{\mathbf{d}} \in \mathbf{d} \} \quad (4.10)$$

となる $\mathbf{x} = [x_i] \subset \mathbb{C}^N$ に対し

$$x_i \in B_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.11)$$

が成り立てば, 式 (4.4) の前半:

$P_h F(U) - u_h \subset U_h$ が満たされる.

証明: 任意の $u \in U$ を取る.

$$P_h F(u) - u_h = P_h(F(u) - u_h) \in X_h$$

より,

$$\hat{v}_h := P_h(F(u) - u_h) = \sum_{i=1}^N \hat{v}_i \phi_i, \quad \hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_i] \in \mathbb{C}^N$$

とおくと, $1 \leq i \leq N$ に対し P_h, F の定義と式 (2.2), (4.9) より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i)_X \hat{v}_j &= (F(u), \phi_i)_X - (u_h, \phi_i)_X \\ &= (f(u), \phi_i)_Y - (u_h, \phi_i)_X \in d_i \end{aligned}$$

である. よって, 式 (4.11) より $\hat{v}_i \in B_i$ となり, $P_h F(u) - u_h \in U_h$ から結論を得る. \square

4.7 ベクトル \mathbf{d} と \mathbf{x} の作成方法

定理 4.2 における式 (4.9) は, U が無限次元の項を含むため正確な値を求めることはできません. そのため, 実際の計算では \mathbf{d} を包含する複素閉集合で代用します. また, 式 (4.10) を満たす \mathbf{x} も, 集合として正確に算定することは困難です. こちらも, 実際の計算では \mathbf{x} を包含する複素閉集合で代用します. それぞれ大きめの評価となるものの, 最終的な包含関係 (4.11) が得られれば問題ありません. また, 式 (4.10) (に対応する包含集合) は, 行列 D に対する連立 1 次方程式を精度保証付きで解くことにより一度で定まります. この方法は次回説明します.

4.8 解の検証例

簡単な検証例として, 次の常微分方程式を考えます. 詳細は参考文献 [3, 3 章] を参照してください.

$$\begin{cases} -u'' - \pi u = (\pi - 1) \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

問題 (4.12) の厳密解は $u(x) = (\sin \pi x)/\pi$ となります. $\Omega = (0, 1)$ に対し, 関数空間を

$$\hat{X} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad X = H_0^1(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega)$$

と設定します. ここで, $L^2(\Omega)$ は Ω 上で 2 乗可積分な関数全体, $H_0^1(\Omega)$ は 1 階までの (正確には超関数の意味での) 微分が $L^2(\Omega)$ に属し, $x = 0, 1$ でゼロとなる関数全体, $H^2(\Omega)$ は 2 階までの微分が $L^2(\Omega)$ に属する関数全体です. X と Y の内積は

$$(u, v)_Y = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad (u, v)_X = (u', v')_Y$$

で定義します. この問題を式 (2.1) に当てはめると,

$$Au = -u'', \quad f(u) = \pi u + (\pi - 1) \sin \pi x$$

となります. X_h は $(0, 1)$ を N 等分した分割点で 1 を取り他で 0 となる区分的 1 次関数で張られる空間に設定します. 図 1 は存在検証に成功した $u_h + U_h$ をプロットしたものです. $N = 10$ です. 候補者集合の有次元部分の最大値ノルムは 0.003792, 無限次元部分のノルムは 0.079097 でした.

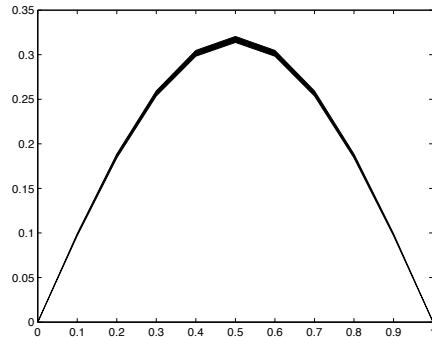


図 1 解の包み込み

5 Newton 型作用素に基づく検証手法

前章で紹介した検証手法は非線形問題に対しても拡張可能であり, 実用的な問題に対する検証結果も得られています. ただし, 検証が成功するためには作用素 F が不動点の近傍で引き込み的であるという条件が (結果的に) 必要になります. そこで, より一般的な問題への適用を目指し, 有限次元部分に Newton 法を適用したアルゴリズムが開発されました [2].

5.1 Newton 型作用素

射影 P_h を用いて X 上の不動点方程式 $u = F(u)$ を

$$\begin{cases} P_h u &= P_h F(u), \\ (I - P_h)u &= (I - P_h)F(u) \end{cases}$$

に分解するまでは前章と同じです. ここで, 3.2 節で導入した X から Y への線形作用素 q を使います. f が Fréchet 微分可能な場合は, 近似解 $u_h \in X_h$ における微分 $q = f'[u_h]$ に取るのが一般的です. 次に, 線形作用素 Q を

$$Q := A^{-1} \circ q : X \rightarrow X \quad (5.1)$$

で, さらに, Newton 型作用素 $N_h : X \rightarrow X_h$ を

$$N_h(u) := P_h u - [I - Q]_h^{-1} P_h(u - F(u)) \quad (5.2)$$

で定義します. N_h の定義式 (5.2) 中の $[I - Q]_h^{-1} : X_h \rightarrow X_h$ は,

$$P_h(I - Q) : X \rightarrow X_h \quad (5.3)$$

の定義域 X を X_h に制限した作用素 $P_h(I - Q)|_{X_h} : X_h \rightarrow X_h$ の逆作用素とし, その存在を仮定します.

N_h は, $\mathcal{F}(u) := u - F(u)$ に形式的に Newton 法を適用し P_h を施すことにより得られる「Newton 型」非線形作用素です^{†5}.

5.2 $[I - Q]_h^{-1}$ の行列・ベクトル表現

次の補題は, 前節で導入した $[I - Q]_h^{-1}$ と式 (3.2) の行列 G との関係と, 具体的な $[I - Q]_h^{-1}$ の行列・ベクトル表現を示すものです.

補題 5.1 $[I - Q]_h^{-1} : X_h \rightarrow X_h$ の存在と G の可逆性は同値である. また, $[I - Q]_h^{-1}$ が存在するとき,

$$w_h = \sum_{i=1}^N w_i \phi_i \in X_h, \quad \mathbf{w} = [w_i] \in \mathbb{C}^N$$

に対し,

$$v_h = [I - Q]_h^{-1} w_h = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i, \quad \mathbf{v} = [v_i] \in \mathbb{C}^N$$

の係数ベクトル \mathbf{v} は,

$$\mathbf{v} = G^{-1} D \mathbf{w} \quad (5.4)$$

で決定される.

証明: $[I - Q]_h^{-1}$ の存在を仮定すれば, 任意の $w_h \in X_h$ に対し $P_h(I - Q)v_h = w_h$ を満たす $v_h \in X_h$ が存在する. P_h の定義より,

$$((I - Q)v_h, \phi_i)_X = (w_h, \phi_i)_X, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (5.5)$$

式 (5.5) の左辺は, 式 (2.2) より

$$\begin{aligned} ((I - Q)v_h, \phi_i)_X &= (v_h, \phi_i)_X - (A^{-1}q v_h, \phi_i)_X \\ &= \sum_{j=1}^N \underbrace{\{(\phi_j, \phi_i)_X - (q \phi_j, \phi_i)_Y \}}_{G_{ij} \text{ (3.2)}} v_j. \end{aligned}$$

^{†5} と「さらっと」書いたものの, 簡単に出てくる作用素ではない筈です. 着想の経緯は [4, 4 章] をご覧ください.

また, 式 (5.5) の右辺は

$$(w_h, \phi_i)_X = \sum_{j=1}^N \underbrace{(\phi_j, \phi_i)_X}_{D_{ij} \text{ (3.1)}} w_j.$$

よって $Gv = Dw$ となり, G の可逆性が導かれる. この議論から, G の可逆性を仮定した $[I - Q]_h^{-1}$ の存在も示すことができる. □

5.3 Newton 型作用素による不動点定式化

有限次元部分に対する Newton 型作用素 N_h を用い, X 上の無限次元作用素 T を

$$T(u) := N_h(u) + (I - P_h)F(u) \quad (5.6)$$

で定義します. このとき,

- N_h は有限次元部分空間への作用素なのでコンパクト
- $(I - P_h)F$ は有界作用素 $I - P_h$ とコンパクト作用素 F の合成作用素なのでコンパクト
- コンパクト作用素同士の和もコンパクト

であることから, T のコンパクト性がいえます. また, $[I - Q]_h^{-1}$ の存在を仮定すれば, 不動点問題 $u = F(u)$ と $u = T(u)$ が同値であることも確認できます.

作用素 T に対しても, F に対する補題 4.1 と同じ議論が適用可能です. すなわち, 空でない有界凸閉な候補者集合 $U \subset X$ に対して

$$\begin{cases} N_h(U) - u_h \subset U_h, \\ (I - P_h)F(U) \subset U_* \end{cases} \quad (5.7)$$

が確認できれば $T(U) \subset U$ となり, Schauder の不動点定理から T の不動点が U 内に存在します. N_h は Newton 型作用素ですので, U がもし真の解を包含していれば, 縮小傾向にあること, つまり式 (5.7) の前半の包含関係の成立が期待できます. また, 無限次元部分 $(I - P_h)F(U)$ は, Newton 型の変換は施していないものの, 前章と同じく, $C(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) に基づく縮小性が期待できます.

5.4 有限次元部分の縮小性

有限次元部分・無限次元部分ともに, 候補者集合の設定は前章と同じです. 無限次元部分に対する確認は定理 4.1 で行います. 有限次元部分の縮小性は次で確認します.

定理 5.1 式 (4.5), (4.7), (4.3) で構成される候補者集合 $U \subset X$ に対し, $u \in U$ のそれぞれの要素を

$$u = u_h + \hat{u}_h + u_*, \quad \hat{u}_h \in U_h, \quad u_* \in U_*$$

で表現する. $d = [d_i] \subset \mathbb{C}^N$ を $1 \leq i \leq N$ に対し

$$d_i = \{(f(u) - q\hat{u}_h, \phi_i)_Y - (u_h, \phi_i)_X \in \mathbb{C} \mid u \in U\} \quad (5.8)$$

で定める. このとき,

$$x = \{\hat{x} \in \mathbb{C}^N \mid \hat{x} = G^{-1}\hat{d}, \quad \forall \hat{d} \in d\} \quad (5.9)$$

となる $x = [x_i] \subset \mathbb{C}^N$ に対し

$$x_i \subset B_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (5.10)$$

が成り立てば, 条件 (5.7) の前半 $N_h(U) - u_h \subset U_h$ が満たされる.

証明: 任意の $u = u_h + \hat{u}_h + u_* \in U$ に対し, N_h の定義より,

$$\begin{aligned} N_h(u) - u_h &= \hat{u}_h - [I - Q]_h^{-1} P_h(u - F(u)) \\ &= [I - Q]_h^{-1} P_h(F(u) - Q\hat{u}_h - u_h). \end{aligned}$$

よって,

$$v_h := N_h(u) - u_h = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i, \quad v = [v_i] \in \mathbb{C}^N,$$

$$w_h := P_h(F(u) - Q\hat{u}_h - u_h) = \sum_{i=1}^N w_i \phi_i,$$

$w = [w_i] \in \mathbb{C}^N$ とおくと, 補題 5.1 より $Gv = Dw$ が成立する. ここで, w_h を P_h の定義を用いて書

き下すと, $1 \leq i \leq N$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i)_X w_j &= (F(u) - Q\hat{u}_h - u_h, \phi_i)_X \\ &= (A^{-1}(f(u) - q\hat{u}_h), \phi_i)_X - (u_h, \phi_i)_X \\ &= (f(u) - q\hat{u}_h, \phi_i)_Y - (u_h, \phi_i)_X \in d_i, \end{aligned}$$

よって, $Dw \in d$ となり, $Gv \in d$ を得る. したがって式 (5.10) より, $N_h(u) - u_h \in U_h$ が導かれる. □

5.5 ベクトル d と x の作成方法

前章と同様, 定理 5.1 におけるベクトル d, x を実際に計算する場合には, それぞれを包含する(一般に複素)閉集合を用いて評価します.

6 検証手法の展開

4章と5章で紹介したコンパクト作用素を用いた不動点定式化と Schauder の不動点定理の成立条件を確認する検証手法は, その後,

- Banach の不動点定理に基づく局所一意性付き存在検証
- 有限次元部分をノルムで評価する検証手法
- 無限次元 Newton 法における線形化作用素の可逆性と線形逆作用素の効率的なノルム評価 (第2回)

に展開していきます. ただし, この“展開”は, あらかじめ方向性を定めての“進展”というより, どちらかと言えば, 「解くべき問題の特質や解の捕まえ方に応じてあれこれ工夫しているうちに結果的

に検証方法の選択肢が増えた」と言えます. そのため, “展開”されたどの手法が優位なのかは問題依存です^{†6}. しかしながら, 各検証手法とも, 射影誤差で不動点問題を分割して評価するという原理は一貫しています. 得られた検証結果やアルゴリズムの詳細は [5, 3, 4] を参照してください.

7 おわりに

今回は, 線形化作用素の逆作用素評価を介さない解の存在検証手法である中尾理論の概要を紹介しました. 中心となる計算は式 (4.10), (5.9) における連立1次方程式の精度保証です. 今回は, 残された有限次元問題の精度保証と, 精度保証付き数値計算を実現するプログラミング環境について紹介したいと思います.

参考文献

- [1] M.T. Nakao: A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, *Japan Journal of Applied Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 313–332, June, 1988.
- [2] M.T. Nakao: A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems II, *Japan Journal of Applied Mathematics*, vol. 7, no. 3, pp.477–488, October, 1990.
- [3] 中尾 充宏, 山本 野人: 精度保証付き数値計算—コンピュータによる無限への挑戦—, 日本評論社, 1998.
- [4] 中尾 充宏: 偏微分方程式の解に対する数値的存在検証—研究の原点とその展開—, *Fundamentals Review*, vol. 2, no. 3, pp.19–28, January, 2009.
- [5] M.T. Nakao, and Y. Watanabe: Numerical verification methods for solutions of semilinear elliptic boundary value problems, *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, vol. 2, no. 1, pp. 2–31, January, 2011.

^{†6} いつも解を捕まえることに手一杯なため, 実は横の比較をしたことがあまりありません.