

1 定理 5.1 の証明

1.1 線形作用素の定義と不動点定式化

以下の作用素を導入し、この作用素の可逆性を確認しに行きます。

$$\tilde{L}w := w - A^{-1}qw : X \longrightarrow X. \quad (1)$$

この時、次の関係が成り立ちます。

補題 1.1 \tilde{L} が可逆ならば、 L も可逆。

【証明】 $\tilde{L} : X \rightarrow X$ が可逆とする。 A に対する条件 1 より、任意の $\phi \in Y$ に対し $v \in X$ が存在して $v = A^{-1}\phi$ を満たす。 \tilde{L} の可逆性より、この v に対応する $w \in X$ が取れて $\tilde{L}w = v$ を満たす。したがって、 \tilde{L} と v の定義より $w - A^{-1}qw = A^{-1}\phi$ 、すなわち $w = A^{-1}(qw + \phi)$ であり、 A^{-1} の定義より $w \in \hat{X}$ かつ、 $Lw = \phi$ が得られる。□

式 (1) で定義した $\tilde{L} : X \rightarrow X$ の可逆性を示すため、次の補題を用います。

補題 1.2

$$\tilde{L}w = 0 \quad (2)$$

が唯一の解 $w = 0$ を持てば、 \tilde{L} は可逆。

【証明】 $\tilde{L}w = w - A^{-1}qw$ かつ、 $A^{-1}q$ は X 上のコンパクト作用素であることから、Fredholm の交代定理 (付録; A5) の記述において、 $T = -A^{-1}q$ 、 $\lambda = -1$ と考える。この時、 $\tilde{L}w = 0$ がゼロ解しか持たないならば、交代定理の 1. は成立しない。したがって 2. が成立し、 \tilde{L} は可逆となる。□

次に、コンパクト線形作用素 $F : X \rightarrow X$ を

$$Fw := A^{-1}qw \quad (3)$$

で定義するとき、問題: $\tilde{L}w = 0$ は X 上の不動点方程式:

$$w = Fw \quad (4)$$

に書き直すことができます。ここで、直交分解の一意性を用います。直交射影 P_h と $X = X_h \oplus X_h^\perp$ によって、不動点問題: $w = Fw$ を

$$\begin{cases} P_h w &= P_h Fw, \\ (I - P_h)w &= (I - P_h)Fw \end{cases} \quad (5)$$

に分解し、有限次元部分を Newton 型作用素:

$$N_h w := P_h w - [I - F]_h^{-1} P_h (I - F)w : X \rightarrow X_h \quad (6)$$

に書き直します． $[I-F]_h^{-1}$ は， $P_h(I-F) : X \rightarrow X_h$ の定義域を X_h に制限した作用素： $P_h(I-F)|_{X_h} : X_h \rightarrow X_h$ の逆作用素です． $[I-F]_h^{-1} : X_h \rightarrow X_h$ の存在は，行列 G の可逆性と同値になります．ここでは存在を仮定します．

N_h を用いて， X 上の作用素：

$$Tw := N_hw + (I - P_h)Fw$$

を定めます．この時，2つの不動点問題： $w = Fw$ と $w = Tw$ は同値となります．

1.2 候補者集合と十分条件

正の数 $\hat{\gamma}$ と $\hat{\alpha}$ を用いて，集合 $W \subset X$ を

$$W_h := \{w_h \in X_h \mid \|w_h\|_X \leq \hat{\gamma}\} \subset X_h, \quad (7)$$

$$W_* := \{w_* \in X_h^\perp \mid \|w_*\|_X \leq \hat{\alpha}\} \subset X_h^\perp, \quad (8)$$

$$W := W_h + W_* \quad (9)$$

で定めます．このとき， T の不動点に対する次の条件を得ます．

補題 1.3 TW の閉包 \overline{TW} と W の内点集合 $\overset{\circ}{W}$ に対し，

$$\overline{TW} \subset \overset{\circ}{W} \quad (10)$$

が成立すれば， $\tilde{L}w = 0$ の解は $w = 0$ のみである．

【証明】 $\tilde{L}w = 0$ を満たすゼロでない $w \in X$ が存在すると仮定する．このとき， w は $w = Tw$ の解でもあり， T の線形性を用いると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$T(tw) = tTw = tw$$

となる．したがって， $\hat{t} \in \mathbb{R}$ を閉集合 W の境界 ∂W に対して $\hat{t}w \in \partial W$ となるように定めることができる．しかしこれは， $\overline{TW} \subset \overset{\circ}{W}$ と $T(tw) = tw$ に矛盾する．よって， $\tilde{L}w = 0$ の解は唯一である．□

1.3 式 (10) の成立条件

次のステップとして，包含関係 (10) が成立するための条件を，有限次元部分と無限次元部分をそれぞれに分けて確認します．まず，有限次元部分の包含（部分空間 X_h の意味で）： $\overline{N_h W} \subset \overset{\circ}{W}_h$ は， W_h の定義 (7) より，

$$\sup_{w \in W} \|N_hw\|_X < \hat{\gamma}$$

と書き直すことができます．

一方，無限次元部分の包含（部分空間 X_h^\perp の意味） $\overline{(I - P_h)\hat{F}W} \subset \overset{\circ}{W}_*$ は，任意の $w \in W$ に対して $(I - P_h)A^{-1}qw \in \overset{\circ}{W}_*$ の成立を要請します．したがって，チュートリアルの記事の式 (4.3), (8) より，

$$C(h) \sup_{w \in W} \|qw\|_Y < \hat{\alpha}$$

が十分条件となります．

以上の結果をまとめます．

補題 1.4 式 (9) で構成した候補者集合 W に対し，

$$\sup_{w \in W} \|N_h w\|_X < \hat{\gamma}, \quad C(h) \sup_{w \in W} \|qw\|_Y < \hat{\alpha},$$

ならば， \tilde{L} は可逆．

1.4 さらに書き下し

補題 1.4 の条件が成立するために，候補者集合の半径である正数 $\hat{\gamma}$, $\hat{\alpha}$ に対し，

$$\gamma := \sup_{\hat{w} \in W} \|N_h \hat{w}\|_X, \quad \alpha := C(h) \sup_{\hat{w} \in W} \|q\hat{w}\|_Y,$$

を求め， $\gamma < \hat{\gamma}$ かつ $\alpha < \hat{\alpha}$ を確認します．候補者集合の任意の $w \in W$ を

$$w = w_h + w_*, \quad w_h \in W_h, \quad w_* \in W_*$$

と記述するとき， q の線形性より

$$\begin{aligned} N_h w &= [I - F]_h^{-1} P_h A^{-1} (qw - qw_h) \\ &= [I - F]_h^{-1} P_h A^{-1} qw_* \end{aligned}$$

を得ます．ここで，

$$\begin{aligned} s_h &:= P_h A^{-1} qw_* = \sum_{i=1}^N s_i \phi_i \in X_h, \quad \mathbf{s} := [s_i] \in \mathbb{C}^N, \\ N_h(w) &:= \sum_{i=1}^N t_i \phi_i \in X_h, \quad \mathbf{t} := [t_i] \in \mathbb{C}^N \end{aligned}$$

と置けば， $[I - F]_h^{-1}$ の定義より

$$((I - F)N_h w, v_h)_X = (s_h, v_h)_X, \quad \forall v_h \in X_h \quad (11)$$

となり，式 (11) は

$$\sum_{i=1}^N t_i ((\phi_i, \phi_j)_X - (q\phi_i, \phi_j)_Y) = \sum_{i=1}^N s_i (\phi_i, \phi_j)_X, \quad 1 \leq j \leq N$$

と同値であり，

$$G\mathbf{t} = D_1 \mathbf{s},$$

よって,

$$\begin{aligned}
\|N_h w\|_X &= \|L_1^H \mathbf{t}\|_2 \\
&= \|L_1^H G^{-1} D_1 \mathbf{s}\|_2 \\
&\leq \|L_1^H G^{-1} L_1\|_2 \|L_1^H \mathbf{s}\|_2 \\
&= \rho \|s_h\|_X
\end{aligned} \tag{12}$$

を得ます.

ここで, したがって, チュートリアルの記事の式 (4.7) と (8) より,

$$\|s_h\|_X \leq \nu_1 \|w_*\|_X \leq \nu_1 \hat{\alpha}, \tag{13}$$

よって, 式 (13) と式 (12) より

$$\|N_h w\|_X \leq \rho \nu_1 \hat{\alpha}, \quad \forall w \in W \tag{14}$$

となります. また, 無限次元部分に対しては, チュートリアルの記事の式 (4.8) と式 (7), (8) より, 各 $w \in W$ に対し

$$\begin{aligned}
\|qw\|_Y &\leq \nu_2 \|w_h\|_X + \nu_3 \|w_*\|_X \\
&\leq \nu_2 \hat{\gamma} + \nu_3 \hat{\alpha}
\end{aligned} \tag{15}$$

が成立します.

1.5 結論

以上から, 定理成立のための条件を導くことができます. 式 (14), (15) より,

$$\gamma < \hat{\gamma}, \quad \alpha < \hat{\alpha}$$

のためには, 不等式:

$$\rho \nu_1 \hat{\alpha} < \hat{\gamma}, \quad C(h)(\nu_2 \hat{\gamma} + \nu_3 \hat{\alpha}) < \hat{\alpha} \tag{16}$$

が, ある $\hat{\alpha}, \hat{\gamma} > 0$ で成立することが条件になります. 定理 5.1 の条件:

$$C(h)(\rho \nu_1 \nu_2 + \nu_3) < 1$$

より

$$1 - C(h)(\rho \nu_1 \nu_2 + \nu_3) > 0$$

であるので, 任意の固定した $\delta > 0$ に対し, $\hat{\alpha} > 0$ を

$$\hat{\alpha} [1 - C(h)(\rho \nu_1 \nu_2 + \nu_3)] > C(h) \nu_2 \delta. \tag{17}$$

が成り立つように選ぶことができます. ゆえに,

$$\hat{\gamma} = \rho \nu_1 \hat{\alpha} + \delta \tag{18}$$

とおけば，不等式 (16) の最初の条件が満たされます．

また， δ に対する式 (18) を式 (17) に代入すると，

$$\hat{\alpha} - \hat{\alpha}C(h) [\rho\nu_1\nu_2 + \nu_3] > C(h)\nu_2(\hat{\gamma} - \rho\nu_1\hat{\alpha}),$$

したがって

$$\hat{\alpha} > C(h)(\hat{\alpha}\nu_3 + \nu_2\hat{\gamma})$$

となり，これは不等式 (16) の 2 番目の条件となります．

2 定理 6.1 の証明

2.1 \tilde{L}^{-1} のノルム評価

まず，

$$\tilde{L}w = w - A^{-1}qw : X \longrightarrow X$$

に対するノルム評価を求めます．

補題 2.1

$$\|\tilde{L}^{-1}\phi\|_X \leq \tilde{M}\|\phi\|_X, \quad \phi \in X \quad (19)$$

となる $\tilde{M} > 0$ は，

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \rho \left(1 + \frac{\nu_1 C(h) \nu_2 \rho}{1 - \kappa} \right) & \frac{\rho \nu_1}{1 - \kappa} \\ \frac{C(h) \nu_2 \rho}{1 - \kappa} & \frac{1}{1 - \kappa} \end{bmatrix} \quad (20)$$

に対して

$$\tilde{M} = \|\mathcal{M}\|_2$$

で定まる．

【証明】 \tilde{L} の線形性と可逆性より，任意の $\phi \in X$ に対し，

$$\tilde{L}\psi = (I - F)\psi = \phi. \quad (21)$$

となる $\psi \in X$ が一意に定まる．

式 (21) を $\psi \in X$ に対する不動点問題:

$$\psi = F\psi + \phi \quad (22)$$

と見ると，直交射影 $P_h : X \rightarrow X_h$ を用いて式 (22) は

$$\begin{cases} P_h \psi &= P_h(F\psi + \phi), \\ (I - P_h)\psi &= (I - P_h)(F\psi + \phi). \end{cases} \quad (23)$$

に一意に分解される．有限次元部分の Newton 型作用素を

$$\hat{N}_h \psi := P_h \psi - [I - F]_h^{-1} P_h ((I - F)\psi - \phi),$$

また，無限次元 Newton 型作用素を

$$\hat{T} \psi := \hat{N}_h \psi + (I - P_h)(F\psi + \phi)$$

でそれぞれ定めると，式 (22) と同値な不動点問題: $\psi = \hat{T}\psi$ を得る．

ここで， ψ と ϕ を有限次元部分と無限次元部分に

$$\psi = \psi_h + \psi_*, \quad \phi = \phi_h + \phi_*, \quad \psi_h, \phi_h \in X_h, \quad \psi_*, \phi_* \in X_h^\perp$$

と分解し， $\|\psi_h\|_X$ と $\|\psi_*\|_X$ を $\|\phi_h\|_X$ と $\|\phi_*\|_X$ を用いて上から評価する．

有限次元部分は，

$$\begin{aligned} \psi_h &= \hat{N}_h \psi \\ &= P_h \psi - [I - F]_h^{-1} P_h ((I - F)\psi - \phi) \\ &= [I - F]_h^{-1} (-P_h F P_h \psi + P_h F \psi + \phi_h) \\ &= [I - F]_h^{-1} (P_h F \psi_* + \phi_h) \end{aligned}$$

より，定理 5.1 の証明と同様の手順で，

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_X &= \|[I - F]_h^{-1} (P_h F \psi_* + \phi_h)\|_X \\ &\leq \rho \|P_h F \psi_* + \phi_h\|_X \\ &\leq \rho (\|P_h A^{-1} q \psi_*\|_X + \|\phi_h\|_X) \\ &\leq \rho (\nu_1 \|\psi_*\|_X + \|\phi_h\|_X) \end{aligned} \tag{24}$$

と評価される．

同様に無限次元部分も

$$\psi_* = (I - P_h)F(\psi_h + \psi_*) + \phi_*$$

より，

$$\begin{aligned} \|\psi_*\|_X &= \|(I - P_h)F(\psi_h + \psi_*) + \phi_*\|_X \\ &\leq C(h) \|q(\psi_h + \psi_*)\|_Y + \|\phi_*\|_X \\ &\leq C(h) \nu_2 \|\psi_h\|_X + C(h) \nu_3 \|\psi_*\|_X + \|\phi_*\|_X \end{aligned} \tag{25}$$

となる．式 (24) を式 (25) に代入すると，

$$\begin{aligned} \|\psi_*\|_X &\leq C(h) \nu_2 \rho \nu_1 \|\psi_*\|_X + C(h) \nu_2 \rho \|\phi_h\|_X + C(h) \nu_3 \|\psi_*\|_X + \|\phi_*\|_X \\ &= C(h) [\nu_2 \rho \nu_1 + \nu_3] \|\psi_*\|_X + C(h) \nu_2 \rho \|\phi_h\|_X + \|\phi_*\|_X \\ &= \kappa \|\psi_*\|_X + C(h) \nu_2 \rho \|\phi_h\|_X + \|\phi_*\|_X, \end{aligned}$$

よって,

$$\|\psi_*\|_X \leq \frac{C(h)\nu_2\rho}{1-\kappa}\|\phi_h\|_X + \frac{1}{1-\kappa}\|\phi_*\|_X \quad (26)$$

を得る.

次に, 式 (26) を式 (24) に代入して,

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_X &\leq \rho\nu_1\frac{C(h)\nu_2\rho}{1-\kappa}\|\phi_h\|_X + \rho\nu_1\frac{1}{1-\kappa}\|\phi_*\|_X + \rho\|\phi_h\|_X \\ &= \rho\left(1 + \frac{\nu_1C(h)\nu_2\rho}{1-\kappa}\right)\|\phi_h\|_X + \frac{\rho\nu_1}{1-\kappa}\|\phi_*\|_X \end{aligned}$$

を得る.

したがって, ベクトルの要素毎の不等式の意味で

$$\begin{bmatrix} \|\psi_h\|_X \\ \|\psi_*\|_X \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \rho\left(1 + \frac{\nu_1C(h)\nu_2\rho}{1-\kappa}\right) & \frac{\rho\nu_1}{1-\kappa} \\ \frac{C(h)\nu_2\rho}{1-\kappa} & \frac{1}{1-\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\phi_h\|_X \\ \|\phi_*\|_X \end{bmatrix}$$

となり, 2-ノルムに対する評価: $\|Av\|_2 \leq \|A\|_2\|v\|_2$ より補題の結論を得る. \square

2.2 ノルム評価

補題 2.1 を用いて, 定理を証明します. 各 $\phi \in Y$ に対し $\psi = \hat{L}^{-1}\phi \in \hat{X}$ とおけば, L の定義より,

$$L\psi = A\psi - q\psi = A(\psi - A^{-1}q\psi) = A\tilde{L}\psi = \phi,$$

よって

$$\psi = \tilde{L}^{-1}A^{-1}\phi$$

となり, $A^{-1}\phi \in X$ と補題 2.1 から

$$\|\psi\|_X \leq \tilde{M}\|A^{-1}\phi\|_X$$

を得ます. A に対する条件 2 を用いて

$$\|A^{-1}\phi\|_X^2 = (A^{-1}\phi, A^{-1}\phi)_X = (\phi, A^{-1}\phi)_Y,$$

さらに Schwarz の不等式とチュートリアルでの式 (2.1) より,

$$(\phi, A^{-1}\phi)_Y \leq \|\phi\|_Y\|A^{-1}\phi\|_Y \leq C_p\|\phi\|_Y\|A^{-1}\phi\|_X$$

となり,

$$\|A^{-1}\phi\|_X \leq C_p\|\phi\|_Y$$

となることから, 定理の成立を確認することができます.

3 定理 6.2 の証明

条件より, \hat{L} は可逆であるので, 任意の $\phi \in Y$ に対して $\psi \in \hat{X}$ が取れて

$$L\psi = A\psi - q\psi = \phi$$

を満たします. よって,

$$A\psi = q\psi + \phi \quad (27)$$

を X 上の不動点形式

$$\psi = A^{-1}(q\psi + \phi) \quad (28)$$

に書き直し, 直交射影 P_h を用いることで,

$$\begin{cases} P_h\psi &= P_h A^{-1}(q\psi + \phi), \\ (I - P_h)\psi &= (I - P_h)A^{-1}(q\psi + \phi) \end{cases} \quad (29)$$

に分解します. 以下, $\psi \in X$ を

$$\psi = \psi_h + \psi_*, \quad \psi_h \in X_h, \quad \psi_* \in X_h^\perp$$

と表記し, $\|\psi_h\|_X$ と $\|\psi_*\|_X$ を $\|\phi\|_Y$ で評価します.

射影定理 (分解の一意性) より,

$$\psi_h = P_h A^{-1}(q\psi + \phi)$$

であり, P_h の定義と条件 A2 より

$$\begin{aligned} (\psi_h, v_h)_X &= (A^{-1}(q\psi + \phi), v_h)_X, \\ &= (q\psi + \phi, v_h)_Y, \\ &= (q\psi_h + q\psi_* + \phi, v_h)_Y, \quad \forall v_h \in X_h, \end{aligned}$$

すなわち,

$$(\psi_h, v_h)_X - (q\psi_h, v_h)_Y = (q\psi_* + \phi, v_h)_Y, \quad \forall v_h \in X_h \quad (30)$$

を得ます. ここで,

$$\psi_h := \sum_{n=1}^N \hat{t}_{h,n} \phi_n \in X_h, \quad \hat{\mathbf{t}} := [\hat{t}_{h,n}] \in \mathbb{R}^N, \quad \hat{\mathbf{f}} := [(q\psi_* + \phi, \phi_n)_Y] \in \mathbb{R}^N$$

と定めると, 式 (30) は

$$G\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{f}}$$

と書くことができます.

次に, 射影 $P_0 : Y \rightarrow X_h$ を

$$(v - P_0 v, v_h)_Y = 0, \quad \forall v_h \in X_h$$

で定義すれば,

$$\xi_h := P_0(q\psi_* + \phi) = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i \in X_h, \quad \xi := [\xi_i] \in \mathbb{R}^N$$

は P_0 の定義より

$$(\xi_h, \phi_j)_Y = (q\psi_* + \phi, \phi_j)_Y, \quad 1 \leq j \leq N$$

を満たすことから,

$$\xi = D_2^{-1} \hat{\mathbf{f}}$$

で決定できます. よって

$$\|P_0(q\psi_* + \phi)\|_Y = \|L_2^H \xi\|_2 = \|L_2^H D_2^{-1} \hat{\mathbf{f}}\|_2 = \|L_2^{-1} \hat{\mathbf{f}}\|_2 \quad (31)$$

が成り立ちます. したがって, 式 (31) と仮定より,

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_X &= \|L_1^H \hat{\mathbf{t}}\|_2 \\ &= \|L_1^H G^{-1} \hat{\mathbf{f}}\|_2 \\ &\leq \|L_1^H G^{-1} L_2\|_2 \|L_2^{-1} \hat{\mathbf{f}}\|_2 \\ &\leq \hat{\rho} \|P_0(q\psi_* + \phi)\|_Y \\ &\leq \hat{\rho} \|q\psi_* + \phi\|_Y \quad \leftarrow P_0 \text{ がない方が大きいので} \\ &\leq \hat{\rho} (\|q\psi_*\|_Y + \|\phi\|_Y) \quad \leftarrow \text{三角不等式} \end{aligned}$$

となり, チュートリアルの式 (4.8) を用いて

$$\|\psi_h\|_X \leq \hat{\rho} \nu_3 \|\psi_*\|_X + \hat{\rho} \|\phi\|_Y \quad (32)$$

を得ます.

一方, 無限次元部分は,

$$\psi_* = (I - P_h) A^{-1} (q\psi + \phi)$$

より, チュートリアルの式 (4.3), (4.8), A^{-1} の存在, 三角不等式を用いて

$$\begin{aligned} \|\psi_*\|_X &\leq C(h) \|q(\psi_h + \psi_*) + \phi\|_Y \\ &\leq C(h) (\|q(\psi_h + \psi_*)\|_Y + \|\phi\|_Y) \\ &\leq C(h) \nu_2 \|\psi_h\|_X + C(h) \nu_3 \|\psi_*\|_X + C(h) \|\phi\|_Y \end{aligned} \quad (33)$$

となります.

式 (32) を式 (33) に代入すれば,

$$\begin{aligned} \|\psi_*\|_X &\leq C(h) \nu_2 \hat{\rho} \nu_3 \|\psi_*\|_X + C(h) \nu_2 \hat{\rho} \|\phi\|_Y + C(h) \nu_3 \|\psi_*\|_X + C(h) \|\phi\|_Y \\ &= C(h) [\nu_2 \hat{\rho} \nu_3 + \nu_3] \|\psi_*\|_X + C(h) \nu_2 \hat{\rho} \|\phi\|_Y + C(h) \|\phi\|_Y \\ &= \hat{\kappa} \|\psi_*\|_X + C(h) (\nu_2 \hat{\rho} + 1) \|\phi\|_Y, \end{aligned}$$

よって

$$\|\psi_*\|_X \leq C(h) \frac{1 + \nu_2 \hat{\rho}}{1 - \hat{\kappa}} \|\phi\|_Y \quad (34)$$

を得ます．同様に，式 (34) を式 (32) に代入すれば，

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_X &\leq C(h) \frac{(1 + \nu_2 \hat{\rho}) \hat{\rho} \nu_3}{1 - \hat{\kappa}} \|\phi\|_Y + \hat{\rho} \|\phi\|_Y \\ &= \hat{\rho} \left(1 + C(h) \frac{(1 + \nu_2 \hat{\rho}) \nu_3}{1 - \hat{\kappa}} \right) \|\phi\|_Y \\ &= \hat{\rho} \left(1 + \frac{\hat{\kappa}}{1 - \hat{\kappa}} \right) \|\phi\|_Y \\ &= \frac{\hat{\rho}}{1 - \hat{\kappa}} \|\phi\|_Y \end{aligned}$$

を得ます．

以上より，

$$\begin{aligned} \|\psi\|_X^2 &= \|\psi_h\|_X^2 + \|\psi_*\|_X^2 \\ &\leq \left(\frac{\hat{\rho}}{1 - \hat{\kappa}} \right)^2 \|\phi\|_Y^2 + \left(C(h) \frac{1 + \nu_2 \hat{\rho}}{1 - \hat{\kappa}} \right)^2 \|\phi\|_Y^2 \\ &= \frac{1}{(1 - \hat{\kappa})^2} (\hat{\rho}^2 + C(h)^2 (1 + \nu_2 \hat{\rho})^2) \|\phi\|_Y^2 \\ &= M^2 \|\phi\|_Y^2, \end{aligned}$$

すなわち，定理の結論を得ます．□