熱対流問題の分岐解に対する精度保証付き数値計算

中尾 充宏 (九州大学大学院数理学研究科)，渡部 善隆 (九州大学大型計算機センター)，
山本 野人 (電気通信大学情報工学科)，西田 孝明 (京都大学大学院理学研究科)

1 はじめに

本発表では 2 次元 (x-z 座標) の Rayleigh-Bénard 対流を記述する Oberbeck-Boussinesq 方程式の基本解からの摂動を表す無次元化方程式:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \omega u_z &= p_x + \mathcal{P}\Delta u, \\ \omega_t + u\omega_x + \omega\omega_z &= p_z - \mathcal{P}\mathcal{R}\,\theta + \mathcal{P}\Delta\omega, \\ u_x + \omega_z &= 0, \\ \theta_t + \omega + u\theta_x + \omega\theta_z &= \Delta\theta, \end{cases} \tag{1}$$

の定常問題に対する精度保証付き数値計算法について述べる．ここに (u,ω) は流速場，p は圧力場，θ は基本状態からの温度差である．また $\mathcal{P},\mathcal{R}$ はそれぞれ Prandtl 数，Rayleigh と呼ばれる無次元数である．

2 問題と定式化

(1) の定常問題を考える．流速場を流れ関数 Ψ を用いて $(u,\omega) = (-\Psi_z, \Psi_x)$ で表現する．また $\Theta := \sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\theta$ とおき圧力 p を消去することで次式を得る:

$$\begin{cases} \mathcal{P}\Delta^2\Psi &= \sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\Delta\Theta &= -\sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \Psi &= 0, \quad \Delta\Psi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \Theta(x,0) &= 0, \quad \Theta(x,\pi) = 0, \\ \Theta_x(0,z) &= 0, \quad \Theta_x(2\pi/a, z) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

ここで領域 Ω は長方形領域 $\{0 < x < 2\pi/a,\ 0 < z < \pi\}$ に制限して考える．$a > 0$ は与えられた正定数とする．ただし境界条件は，速度場については $z = 0, \pi$ で stress free, $x = 0, 2\pi/a$ で周期境界条件を仮定し，温度場については Dirichlet 条件を課している．

想定した境界条件から (2) の解 Ψ, Θ の形を次のように仮定して考える:

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin(amx)\sin(nz), \quad \Theta = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\cos(amx)\sin(nz). \tag{3}$$

$u := (\Psi,\Theta)$, $f_1(u) := \sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z$, $f_2(u) := -\sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z$, $f(u) := (f_1(u), f_2(u))$ とおくと，f は $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ への連続写像である．さらに与えられた境界条件のもと，任意の $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ に対し $\Delta^2\bar{\Psi} = g_1$ および $-\Delta\bar{\Theta} = g_2$ は一意の解 $(\bar{\Psi},\bar{\Theta}) \in H^4(\Omega)\times H^2(\Omega)$ を持つ．これらの対応に $H^4(\Omega)$ から $H^3(\Omega)$ へ，$H^2(\Omega)$ から $H^1(\Omega)$ への埋め込みまで含めた写像を $(\Delta^2)^{-1}$, $(-\Delta)^{-1}$ と書くと，

$$K := (\mathcal{P}^{-1}(\Delta^2)^{-1}, (-\Delta)^{-1}) : \ L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \to H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$$

は compact 写像となる．したがって (2) は $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上の compact 作用素 $F:=Kf$ に対する不動点問題:

$$u = Fu \tag{4}$$

と同値であり，Schauder の不動点定理が適用できる．

3 数値的検証手順

近似空間 $S_N^{(1)}$, $S_N^{(2)}$ を $\psi_{mn}:=\sin(amx)\sin(nz)$, $\theta_{mn}:=\cos(amx)\sin(nz)$ に対し,

$$S_N^{(1)}:=\{\Psi_N \mid \Psi_N=\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\hat{A}_{mn}\psi_{mn},\},\qquad S_N^{(2)}:=\{\Theta_N \mid \Theta_N=\sum_{m=0}^{M_2}\sum_{n=1}^{N_2}\hat{B}_{mn}\theta_{mn}\}$$

と定める．いま $g_1,g_2\in L^2(\Omega)$ に対し, 与えられた境界条件のもとでの

$$\mathcal{P}\Delta^2\bar{\Psi}=g_1,\qquad -\Delta\bar{\Theta}=g_2$$

の解 $\bar{\Psi}$ および $\bar{\Theta}$ のそれぞれ $S_N^{(1)}$ および $S_N^{(2)}$ への projection $P_N^{(1)}\bar{\Psi}$, $P_N^{(2)}\bar{\Theta}$ を次で定義する:

$$\left\{\begin{array}{rcll}\mathcal{P}(\Delta^2P_N^{(1)}\bar{\Psi},v_N^{(1)})_{L^2} &=& (g_1,v_N^{(1)})_{L^2} & \forall v_N^{(1)}\in S_N^{(1)},\\ -(\Delta P_N^{(2)}\bar{\Theta},v_N^{(2)})_{L^2} &=& (g_2,v_N^{(2)})_{L^2} & \forall v_N^{(2)}\in S_N^{(2)},\end{array}\right.$$

ただし $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ は Ω 上の L^2 内積とする．ここで $P_N^{(1)}\bar{\Psi}$ および $P_N^{(2)}\bar{\Theta}_N$ は，それぞれ (3) の形をした $\bar{\Psi}$ の (M_1,N_1)-truncation および $\bar{\Theta}$ の (M_2,N_2)-truncation に一致することに注意すれば，$\|\bar{\Psi}-P_N^{(1)}\bar{\Psi}\|_{H^3}$, $\|\bar{\Theta}-P_N^{(2)}\bar{\Theta}\|_{H^1}$ および他のノルム (L^2,H^2 など) の構成的 a priori 誤差評価を得る．さらに埋め込み $H^2\hookrightarrow L^\infty$ の構成的評価を用いることにより，途中計算に必要な L^∞ 誤差評価も得ることができる．以上のことから，projection P_N: $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)\rightarrow S_N^{(1)}\times S_N^{(2)}$ を $P_N:=(P_N^{(1)},P_N^{(2)})$ で定義すれば，不動点方程式 (4) は有限次元 (projection) と無限次元 (error) とに分けて

$$\left\{\begin{array}{rcl}P_Nu &=& P_NFu,\\ (I-P_N)u &=& (I-P_N)Fu\end{array}\right.$$

と書くことができる．次に (2) の近似解 $(\hat{\Psi}_N,\hat{\Theta}_N)\in S_N^{(1)}\times S_N^{(2)}$ を Fourier-Galerkin 法により導かれる非線形方程式

$$\left\{\begin{array}{rcll}\mathcal{P}(\Delta^2\hat{\Psi}_N,v_N^{(1)})_{L^2} &=& (f_1(\hat{\Psi}_N,\hat{\Theta}_N),v_N^{(1)})_{L^2} & \forall v_N^{(1)}\in S_N^{(1)},\\ -(\Delta\hat{\Theta}_N,v_N^{(2)})_{L^2} &=& (f_2(\hat{\Psi}_N,\hat{\Theta}_N),v_N^{(2)})_{L^2} & \forall v_N^{(2)}\in S_N^{(2)}.\end{array}\right.$$

に Newton-Raphson 法を適用して近似的に求める．さらに (2) の解 (Ψ,Θ) を

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Psi &=& \hat{\Psi}_N+w_N^{(1)}+\alpha^{(1)},\\ \Theta &=& \hat{\Theta}_N+w_N^{(2)}+\alpha^{(2)}\end{array}\right.$$

と分解することで残差引き戻しの形に書き直し，有限次元部分に対して Newton タイプの作用素を適用することにより Schauder の不動点定理を満足する集合を計算機内で構成する手順を導く．ここに $w_N^{(1)}$ および $w_N^{(2)}$ は有限次元部分を表す関数であり，$\alpha^{(1)}$ および $\alpha^{(2)}$ は無限次元部分に対応する．定式化の詳細，数値例は講演時に述べる．