熱対流問題の分岐解に対する精度保証付き数値計算について

渡部 善隆 (九州大学・大型計算機センター)，山本 野人 (電気通信大学・情報工)，
中尾 充宏 (九州大学・数理)，西田 孝明 (京都大学・理)

1 はじめに

本発表では Rayleigh-Bénard 対流として知られる熱対流問題の定常解に対する精度保証付き数値計算法について述べる．問題を長方形領域に制限し， Fourier-Galerkin 法により得られる近似解のまわりで真の解の存在証明と定量的誤差限界を与える数値的検証手順を提案し，いくつかの数値例を示す．

2 問題と定式化

次の 2 次元 (x-z 座標) 定常熱対流問題を考える:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathcal{P}\Delta^2\Psi &=& \sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z & \text{in} \quad \Omega, \\ -\Delta\Theta &=& -\sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z & \text{in} \quad \Omega, \\ \Psi &=& 0, \quad \Delta\Psi = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \Theta(x,0) &=& 0, \quad \Theta(x,\pi) = 0, & \\ \Theta_x(0,z) &=& 0, \quad \Theta_x(2\pi/a, z) = 0. & \end{array}\right. \tag{1}$$

ここで領域 Ω は $\{0 < x < 2\pi/a,\ 0 < z < \pi\}$， $a > 0$ は与えられた正定数とする．

(1) は x 方向無限の水平領域における Rayleigh-Bénard 対流を Oberbeck-Boussinesq 近似を用い周期境界条件を付加してモデル化した (e.g.[1]) 定常問題を表す． Ψ は流速の流れ関数， Θ は基本状態からの温度差， $\mathcal{P}$ は Prandtl 数， $\mathcal{R}$ は Rayleigh と呼ばれる無次元数である．

想定した境界条件から (1) の解 Ψ, Θ の形を次のように仮定して考える:

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin(amx)\sin(nz), \quad \Theta = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\cos(amx)\sin(nz). \tag{2}$$

$u := (\Psi, \Theta)$, $f_1(u) := \sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z$, $f_2(u) := -\sqrt{\mathcal{P}\mathcal{R}}\,\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z$, $f(u) := (f_1(u), f_2(u))$ とおくと， f は $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ への連続写像である． さらに与えられた境界条件のもと，任意の $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ に対し $\Delta^2\bar{\Psi} = g_1$ および $-\Delta\bar{\Theta} = g_2$ は一意の解 $(\bar{\Psi}, \bar{\Theta}) \in H^4(\Omega)\times H^2(\Omega)$ を持つ．これらの対応に $H^4(\Omega)$ から $H^3(\Omega)$ へ， $H^2(\Omega)$ から $H^1(\Omega)$ への埋め込みまで含めた写像を $(\Delta^2)^{-1}$, $(-\Delta)^{-1}$ と書くと，

$$K := (\mathcal{P}^{-1}(\Delta^2)^{-1}, (-\Delta)^{-1}) :\ L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \to H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$$

は compact 写像となる．したがって (1) は $H^3(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 上の compact 作用素 $F := Kf$ に対する不動点問題:

$$u = Fu \tag{3}$$

と同値であり， Schauder の不動点定理が適用できる．

3 数値的検証手順

近似空間 $S_N^{(1)}$, $S_N^{(2)}$ を $\psi_{mn} := \sin(amx)\sin(nz)$, $\theta_{mn} := \cos(amx)\sin(nz)$ に対し,

$$S_N^{(1)} := \{\Psi_N \mid \Psi_N = \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1} \hat{A}_{mn}\psi_{mn},\}, \qquad S_N^{(2)} := \{\Theta_N \mid \Theta_N = \sum_{m=0}^{M_2}\sum_{n=1}^{N_2} \hat{B}_{mn}\theta_{mn}\}$$

と定める．いま $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ に対し, 与えられた境界条件のもとでの

$$\mathcal{P}\Delta^2\bar{\Psi} = g_1, \qquad -\Delta\bar{\Theta} = g_2$$

の解 $\bar{\Psi}$ および $\bar{\Theta}$ のそれぞれ $S_N^{(1)}$ および $S_N^{(2)}$ への projection $P_N^{(1)}\bar{\Psi}$, $P_N^{(2)}\bar{\Theta}$ を次で定義する:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\Delta^2 P_N^{(1)}\bar{\Psi}, v_N^{(1)})_{L^2} &= (g_1, v_N^{(1)})_{L^2} \quad \forall v_N^{(1)} \in S_N^{(1)}, \\ -(\Delta P_N^{(2)}\bar{\Theta}, v_N^{(2)})_{L^2} &= (g_2, v_N^{(2)})_{L^2} \quad \forall v_N^{(2)} \in S_N^{(2)}, \end{cases}$$

ただし $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ は Ω 上の L^2 内積とする．ここで $P_N^{(1)}\bar{\Psi}$ および $P_N^{(2)}\bar{\Theta}_N$ は，それぞれ (2) の形をした $\bar{\Psi}$ の (M_1, N_1)-truncation および $\bar{\Theta}$ の (M_2, N_2)-truncation に一致することに注意すれば，$\|\bar{\Psi} - P_N^{(1)}\bar{\Psi}\|_{H^3}$, $\|\bar{\Theta} - P_N^{(2)}\bar{\Theta}\|_{H^1}$ および他のノルム (L^2, H^2 など) の構成的 a priori 誤差評価を得る．さらに埋め込み $H^2 \hookrightarrow L^\infty$ の構成的評価を用いることにより，途中計算に必要な L^∞ 誤差評価も得ることができる．以上のことから，projection P_N: $H^3(\Omega) \times H^1(\Omega) \to S_N^{(1)} \times S_N^{(2)}$ を $P_N := (P_N^{(1)}, P_N^{(2)})$ で定義すれば，不動点方程式 (3) は有限次元 (projection) と無限次元 (error) とに分けて

$$\begin{cases} P_N u &= P_N F u, \\ (I - P_N)u &= (I - P_N)Fu \end{cases}$$

と書くことができる．したがって [2] の手法が適用可能となる．

具体的な検証手順としては，まず (1) の近似解 $(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N) \in S_N^{(1)} \times S_N^{(2)}$ を Fourier-Galerkin 法により導かれる非線形方程式

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\Delta^2\hat{\Psi}_N, v_N^{(1)})_{L^2} &= (f_1(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), v_N^{(1)})_{L^2} \quad \forall v_N^{(1)} \in S_N^{(1)}, \\ -(\Delta\hat{\Theta}_N, v_N^{(2)})_{L^2} &= (f_2(\hat{\Psi}_N, \hat{\Theta}_N), v_N^{(2)})_{L^2} \quad \forall v_N^{(2)} \in S_N^{(2)}. \end{cases}$$

に Newton-Raphson 法を適用して (近似的に) 求める．次に (1) の解 (Ψ, Θ) を

$$\begin{cases} \Psi &= \hat{\Psi}_N + w_N^{(1)} + \alpha^{(1)}, \\ \Theta &= \hat{\Theta}_N + w_N^{(2)} + \alpha^{(2)} \end{cases}$$

と分解することで残差引き戻しの形に書き直し，Newton タイプの作用素を用いたアルゴリズムにより Schauder の不動点定理を満足する集合を計算機内で構成することによって数値的検証を行なう．ここに $w_N^{(1)}$ および $w_N^{(2)}$ は有限次元部分を表す関数であり，$\alpha^{(1)}$ および $\alpha^{(2)}$ は無限次元部分に対応する．定式化の詳細，数値例は講演時に述べる．

参考文献

[1] J. H. Curry, Bounded solutions of finite dimensional approximations to the Boussinesq equations, *SIAM J. Math. Anal.* **10**, pp.71–79 (1979).

[2] 中尾充宏, 山本野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.