楕円型逆固有値問題におけるポテンシャル関数の精度保証付き再構成について

渡部 善隆 (九州大学・情報基盤センター)，山本 野人 (電気通信大学・情報工)，
中尾 充宏 (九州大学・数理)

1 はじめに

与えられた有限個の入力データに対し，これらのデータが楕円型固有値問題の固有値となるようなポテンシャル関数を計算機を用いて再構成するアルゴリズムを提案する．ポテンシャル関数の構成手順は打ち切り誤差および丸め誤差を考慮したものであり，得られる結果は数学的に厳密なものである．

2 問題と定式化

有限個の実入力データ

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_M$$

が与えられたとき，$\{\mu_i\}_{1\le i\le M}$ が次の楕円型固有値問題の固有値となるようなポテンシャル関数 $q(x,y)$ を構成する問題を考える:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + qu &=& \lambda u & \text{in} \quad \Omega, \\ u &=& 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

ここで Ω は 2 次元多角形凸領域とする．また，q は Ω の重心について対称な関数 $\hat{q}$ および基底関数 $q_j \in C(\bar{\Omega})$, $1 \le j \le M$ で張られる空間:

$$S := \{\, q \in C(\bar{\Omega}) \mid q = \hat{q} + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j q_j,\ \alpha_j \in \boldsymbol{R} \}$$

内に構成することとする．$\hat{q}$ は補助ポテンシャルと呼ばれ，通常，何らかの方法で求めた近似解として決定される．S 内にポテンシャル関数を構成するということは，対応する係数

$$\alpha := [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M]^T \in \boldsymbol{R}^M$$

を決定するということと同値である．

$$q(\alpha) := \hat{q} + \sum_{j=1}^{M} \alpha_j q_j \in S$$

と書き表し，$q(\alpha)$ に対する固有値問題 (1) の第 i 番目の固有値を $\lambda_i(q(\alpha))$ とおくと，逆固有値問題は $\boldsymbol{R}^M$ 上の写像

$$f(\alpha) := [\lambda_1(q(\alpha)) - \mu_1,\ \lambda_2(q(\alpha)) - \mu_2,\ \ldots,\ \lambda_M(q(\alpha)) - \mu_M]^T$$

の零点を求める問題に帰着される．ここで，有限次元非線形方程式 $f(\alpha) = 0$ の形は具体的には決定できず，無限次元楕円型固有値問題を介し陰的に定まることに注意が必要である．

3 区間 Newton 法

非線形方程式 $f(\alpha) = 0$ の解の包み込みは Neher によって提案された区間 Newton 法 [1] を拡張したアルゴリズムにより行なう．以下，区間を “[ ]” で表す．

1. 初期区間ベクトル $[\alpha]^{(0)} \subset \boldsymbol{R}^M$ を与える． $k = 0$ とする．
2. $q([\alpha]^{(k)}) := \hat{q} + \sum_{j=1}^{M} [\alpha_j]^{(k)} q_j$ に対し，楕円型固有値問題:
$$\begin{cases} -\Delta u + q([\alpha]^{(k)})u &= \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} &= 1 \end{cases} \tag{2}$$
の i 番目の固有値 λ_i および固有ベクトル u_i を $1 \leq i \leq M$ まで精度保証付きで評価する．
3. λ_i, μ_i を用いて区間ベクトル $f([\alpha]^{(k)}) \subset \boldsymbol{R}^M$ を評価する．
4. $f([\alpha]^{(k)})$ の Jacobian に対応する区間行列 $J := \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha_j}([\alpha]^{[k]})\right)_{ij} \subset \boldsymbol{R}^{M\times M}$ を評価する．
5. $[\beta]^{(k)} := \mathrm{mid}([\alpha]^{(k)}) - J^{-1} f([\alpha]^{(k)})$ を評価する．ただし $\mathrm{mid}([\alpha]^{(k)})$ は $[\alpha]^{(k)}$ の各要素区間の中点を取ったベクトルとする．
6. $[\beta]^{(k)} \subset [\alpha]^{(k)}$ ならば $f(\alpha) = 0$ の解が一意に $[\beta]^{(k)}$ 内に存在する．成立しない場合は $[\alpha]^{(k+1)} := [\alpha]^{(k)} \cap [\beta]^{(k)}$ にとして 2. へ．

2. における楕円型固有値問題の固有値，固有ベクトルの計算は [2] の手法を拡張して精度保証付きで行なう．また， [1] によって提案された手法は 1 次元の Sturm-Lioville 問題に対するものであり，偏微分方程式には直接拡張できない．我々は 4. における Jacobian の包み込みを保証する条件を [3] の手法を用い数値的に検証することによって，逆固有値問題の精度保証が 2 次元にも拡張可能であることを明らかにする．

手法の詳細，数値例は講演時に示す予定である．

参考文献

[1] Neher, M., Enclosing solutions of an inverse Strum-Lioville problem with finite data, *Computing* 53 (1994), 379–395.

[2] Nagatou, K., A numerical method to verify the elliptic eigenvalue problems including a uniqueness property, *Computing* 63 (1999), 109–130.

[3] 中尾充宏, 山本野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.