Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価

A Posteriori Error Estimate for Finite Element Solutions of Stokes Equation

中尾 充宏 † 山本 野人 † 渡部 善隆 ‡

Mitsuhiro T.Nakao Nobito Yamamoto Yoshitaka Watanabe

† 九州大学大学院数理学研究科 ‡ 九州大学大型計算機センター

1 introduction

Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori タイプの誤差評価としては Verfürth [7], [8] や Bank ら [1] の仕事がある．また，定常 Navier-Stokes 方程式に対する a poteriori 誤差評価についても Verfürth [9] の研究がある．しかし，それらは誤差の指標 (error estimator) であり， mesh の再細分化 (mesh refinement) に寄与することが主要な目的であり，誤差の定量的保証を与えるものではない．

本稿では，連続問題に対する inf-sup condition に関わる定数を数値評価することによって，厳密な意味での Stokes 方程式の a poteriori 誤差の数値的保証が与えられることを示す．

次の同次境界条件を持つ Stokes 問題を考える．

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の凸多角形， $u = (u_1, u_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$ は二次元ベクトル値関数 $\nu > 0$ である．なお， "T" は転置記号とする． $H^k(\Omega)$ を通常の k 次 Sobolev 空間とし，関数空間を以下で定義する．

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\equiv \{v \in H^1(\Omega) \ ; \ v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \\ L_0^2(\Omega) &\equiv \{v \in L^2(\Omega) \ ; \ \int_\Omega v \, dx \, dy = 0\}. \\ \mathcal{S} &\equiv H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega). \\ V &\equiv \{v \in H_0^1(\Omega)^2 \ ; \ \operatorname{div} v = 0\}. \\ V^\perp &\equiv \{v \in H_0^1(\Omega)^2 \ ; \ (\nabla v, \nabla w) = 0 \quad w \in V\}. \end{aligned}$$

$(\cdot, \cdot)$ を Ω 上の L^2- 内積とし， norm は以下で定める．

$$\begin{aligned} |\cdot|_0 &: \quad L^2(\Omega)\text{-norm}, \ |v|_0{}^2 = \int_\Omega v^2 \, dxdy. \\ |\cdot|_1 &: \quad H_0^1(\Omega)\text{-seminorm}, \ |v|_1 = |\nabla v|_0. \end{aligned}$$

また， $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ 上の bilinear form $\mathcal{L}$ を以下で定義する :

$$\mathcal{L}([u,p],[v,q]) \equiv \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) - (q, \operatorname{div} u) \qquad [u,p], \ [v,q] \in \mathcal{S}. \tag{1.2}$$

2 inf-sup condition の数値的評価

(1.2) で定義した作用素 $\mathcal{L}$ を用い，Stokes 方程式 (1.1) は次の同値な問題に置き換えられる：

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad [u,p] \in \mathcal{S} \quad \text{such that} \\ &\mathcal{L}([u,p],[v,q]) = (f,v) \qquad \forall [v,q] \in \mathcal{S}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

よく知られているように，(2.1) は $\mathcal{S}$ 内に unique solution を持つ．Stokes 方程式の解の存在を保証する条件は "inf-sup condition" と呼ばれる．inf-sup condition に関わる定数は以下の Lemma によって決まる．

Lemma 2.1 $\forall q \in L_0^2(\Omega)$ に対し，次を満たす $v \in V^{\perp}$ が唯一存在する．

$$\operatorname{div} v = q, \tag{2.2}$$

$$|v|_1 \leq \frac{1}{\beta}\,|q|_0. \tag{2.3}$$

$\beta > 0$ は Ω にのみ依存する定数．

β は，特定の領域についてならば次の定理を用いて算定できる．

Lemma 2.2 Ω は star-shaped domain とする．境界 $\partial\Omega$ を極座標 (polar coordinates) を用いて

$$r = f(\theta) \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

であらわす．このとき，Lemma 2.1 の定数 β について次が成立：

$$\mathcal{F}(\theta) \equiv \left\{ \left[1 + \left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{|f'(\theta)|}{f(\theta)} \right\}^2$$

とおくと

$$\frac{1}{\beta} \leq \sqrt{1 + \max_{\theta} \mathcal{F}(\theta)}. \tag{2.4}$$

証明は [3] による．[3] では，Babuška-Aziz inequality (2.2) と，Korn's inequality, Friedrich's inequality との同値性を示す過程で，$1/\beta$ の値が数値的に評価出来ることを述べている．

例えば正方領域では $1/\beta < 2.614$ となる ([3] の conjecture として optimal constant は正方領域で $1/\beta = \sqrt{7/2} \sim 1.871$)．また，Ω が正 n 角形のとき $\dfrac{1}{\beta} = \sqrt{\dfrac{2}{1-\sin(\pi/n)}}$ となる.

定数 β を用いて次の不等式が成り立つ：

Theorem 2.1 $\forall [u,p] \in \mathcal{S}$, $\delta(u,p) = \sup\limits_{[v,q]\in\mathcal{S}} \dfrac{\mathcal{L}([u,p],[v,q])}{|v|_1 + |q|_0}$ とおくと，

$$\begin{cases} |u|_1 \leq \left(\dfrac{1}{\nu^2} + \dfrac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta(u,p), \\ |p|_0 \leq \left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{\nu}{\beta^2} \right) \delta(u,p). \end{cases} \tag{2.5}$$

【証明】V は $H_0^1(\Omega)^2$ 内の閉部分空間より，$H_0^1(\Omega)^2 = V \oplus V^\perp$ と直和分解できる．従って任意の $u \in H_0^1(\Omega)^2$ は

$$u = w + u_0 \quad w \in V \quad u_0 \in V^\perp$$

と書ける．また，$\mathrm{div}\, w = 0$ より，$\mathrm{div}\, u = \mathrm{div}\, u_0$. $\delta(u,p)$ の定義から，$v = w$, $q = 0$ とすることにより，

$$\delta(u,p) \geq \frac{\nu(\nabla w, \nabla w) - (p, \mathrm{div}\, w)}{|w|_1}.$$

ここで，$w \in V$ より $\mathrm{div}\, w = 0$. よって

$$\delta(u,p) \geq \nu |w|_1. \tag{2.6}$$

一方，δ の定義より $v = 0$ とおけば，

$$\delta(u,p) \geq \frac{-(q, \mathrm{div}\, u_0)}{|q|_0} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Lemma 2.1 より，q を $\mathrm{div}\, u_0 = -q$，$\beta |u_0|_1 \leq |q|_0$ をみたすようにとれば，

$$\delta(u,p) \geq |q|_0 \geq \beta |u_0|_1. \tag{2.7}$$

以上をまとめる．$\delta = \delta(u,p)$ と略すると，(2.6), (2.7) より，

$$\begin{aligned} {|u|_1}^2 &= {|w|_1}^2 + {|u_0|_1}^2 \\ &\leq \frac{\delta^2}{\nu^2} + \frac{\delta^2}{\beta^2} \\ &= \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \delta^2. \end{aligned}$$

次に，Lemma 2.1 より $p \in L_0^2(\Omega)$ に対し $v \in V^\perp$ を

$$\mathrm{div}\, v = -p, \quad |v|_1 \leq \frac{1}{\beta} |p|_0$$

となるように定める．$p = 0$ のときは $\mathrm{div}\, v = 0$ となるので，$p \neq 0$ を考える．

$v \in V^\perp$ より，$(\nabla u, \nabla v) = (\nabla u_0, \nabla v)$. よって

$$\delta(u,p) \geq \frac{\nu(\nabla u_0, \nabla v) - (q, \mathrm{div}\, u_0) + {|p|_0}^2}{|v|_1 + |q|_0}.$$

ここで，

$$K = \frac{\nu(\nabla u_0, \nabla v)}{{|\mathrm{div}\, u_0|_0}^2} \qquad q = K \mathrm{div}\, u_0 \in L_0^2(\Omega)$$

とおくと，$\nu(\nabla u_0, \nabla v) - (q, \mathrm{div}\, u_0) = 0$. $\mathrm{div}\, u_0 = 0$ の場合は $u_0 = 0$ となるので，考えなくてよい．また，Lemma 2.1 の norm 評価 (2.3) より，

$$|u_0|_1 \leq \frac{1}{\beta} \left| \frac{q}{K} \right|_0 = \frac{1}{\beta} |K|^{-1} |q|_0 = \frac{1}{\beta} |\mathrm{div}\, u_0|_0.$$

従って，

$$\begin{aligned} |q|_0 &= |K| |\mathrm{div}\, u_0|_0 = \frac{\nu(\nabla u_0, \nabla v)}{|\mathrm{div}\, u_0|_0} \\ &\leq \frac{\nu |u_0|_1 |v|_1}{|\mathrm{div}\, u_0|_0} \\ &\leq \frac{\nu}{\beta^2} |p|_0. \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\delta(u,p) &\geq \frac{{|p|_0}^2}{\frac{1}{\beta}|p|_0+|q|_0}\\ &\geq \frac{{|p|_0}^2}{\frac{1}{\beta}|p|_0+\frac{\nu}{\beta^2}|p|_0}\\ &= \left(\frac{1}{\beta}+\frac{\nu}{\beta^2}\right)^{-1}|p|_0.\end{aligned}$$

■

3 有限要素解と a posteriori 誤差評価

Theorem 2.1 により，inf-sup condition に関わる定数が数値的にわかった．これを用いれば，以下に述べる様に (2.1) の有限要素近似解を求めることで，真の解と離散解との a posteriori な誤差評価が定量的に可能となる．そのために，有限要素近似空間を設定する．

$\mathcal{T}_h$ を領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ の三角形または四角形分割，h を $\mathcal{T}_h$ の scale parameter とする．$h>0$ は領域の分割幅を通常表す．

次に $X_h\subset H_0^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ を速度場 u の各成分を近似する有限要素部分空間，$Y_h\subset L^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ を圧力場 p を近似する有限要素部分空間とする．また，X_h^* を X_h の基底に境界上の node に対応する基底を付け加えたもので張られる空間とおく．X_h^* の作り方から，

$$X_h\subset X_h^*\subset H^1(\Omega),\quad X_h\neq X_h^*.$$

続いて，無限次元空間から有限次元空間への projection を定義する．P_0 は $L^2(\Omega)$ から X_h への L^2-projection，$\hat{P}_0$ は $L^2(\Omega)$ から X_h^* への L^2-projection，また，P_1 を $H_0^1(\Omega)$ から X_h への $H_0^1(\Omega)$-projection とする．

次に，([10]) の手法を導入する．$w_h\in X_h$ に対し，$\overline{\nabla}w_h\in(X_h^*)^2$，$\overline{\Delta}w_h\in L^2(\Omega)$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}w_h &\equiv (\hat{P}_0\frac{\partial w_h}{\partial x},\hat{P}_0\frac{\partial w_h}{\partial y}),\\ \overline{\Delta}w_h &\equiv \mathrm{div}\,(\overline{\nabla}w_h)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{P}_0\frac{\partial w_h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{P}_0\frac{\partial w_h}{\partial y}.\end{aligned}$$

ベクトル形で考えると，$u_h\in X_h^2$ に対し，$\overline{\nabla}u_h$ は $u\in H_0^1(\Omega)$ に対する ∇u と同様，$X_h^*\times X_h^*$ の形の二次の行列値関数になる．また，内積，norm は ∇u と同じの成分対応で well-defined である．“$\overline{\ }$” がついているように，$\overline{\nabla}$, $\overline{\Delta}$ はともに ∇, Δ の近似であることが期待されている．また，幾つかの数値例からも，充分な精度が報告されている．$\overline{\nabla}$, $\overline{\Delta}$ に関しては，以下の性質が成り立つ．

Lemma 3.1 $\forall v_h\in X_h^2$ に対し，

$$(-\overline{\Delta}v_h,\phi)=(\overline{\nabla}v_h,\nabla\phi)\qquad\forall\phi\in H_0^1(\Omega)^2.$$

証明は [10] よる．

(2.1) の離散解は次で与えられる：

$$\begin{aligned} &\text{find}\ \ [u_h, p_h] \in X_h^2 \times (Y_h \cap L_0^2(\Omega))\ \ \text{such that} \\ &\mathcal{L}(\,[u_h, p_h], [v_h, q_h]\,) = (\,f, v_h\,) \qquad \forall [v_h, q_h] \in X_h^2 \times Y_h. \end{aligned} \tag{3.1}$$

また，X_h の近似性として次を仮定する：

$$\inf_{\xi \in X_h} |v - \xi|_1 \le C_0 h |v|_2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{3.2}$$

C_0 は数値的に算定可能な正定数である．仮定 (3.2) は，一般の有限要素空間で成立することが知られている．また，C_0 が数値的に決められるような X_h の例は多い．例えば，一次元の区分一次要素の空間では $C_0 = 1/\pi$ となる ([6])．また，一次元の区分二次要素のテンソル積として定義される二次元矩形要素では，[4] の手法を用いて，一様メッシュの場合 $C_0 = 1/(2\pi)$，また，三角形一様分割の区分一次要素では $C_0 \le 0.81$ となることがいえる．

(3.2) から，projection の性質と Aubin-Nitsche's trick を用いて，直ちに以下が示せる．

Lemma 3.2 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $v_h = P_1 v$ とおくと，以下の不等式が成立する：

$$|v - v_h|_1 \le |v|_1, \tag{3.3}$$

$$|v - v_h|_0 \le C_0 h |v|_1. \tag{3.4}$$

(2.1) の解 $[u, p]$ と (3.1) の有限要素解 $[u_h, p_h]$ の誤差を

$$\begin{cases} e_h \equiv u - u_h \\ \varepsilon_h \equiv p - p_h \end{cases}$$

とおく．以下，$\forall [v, q] \in \mathcal{S}$ について $\mathcal{L}$ を変形する．

まず $\mathcal{L}$ の定義から

$$\mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) = \nu(\,\nabla e_h, \nabla v\,) - (\,\varepsilon_h, \operatorname{div} v\,) - (\,q, \operatorname{div} e_h\,). \tag{3.5}$$

次に，$\forall [\xi_h, q_h] \in X_h^2 \times (Y_h \cap L_0^2(\Omega))$ に対し

$$\nu(\,\nabla u, \nabla \xi_h\,) - (\,p, \operatorname{div} \xi_h\,) - (\,q_h, \operatorname{div} u\,) = 0,$$

$$\nu(\,\nabla u_h, \nabla \xi_h\,) - (\,p_h, \operatorname{div} \xi_h\,) - (\,q_h, \operatorname{div} u_h\,) = 0.$$

上の二つの式より，

$$\nu(\,\nabla e_h, \nabla \xi_h\,) - (\,\varepsilon_h, \operatorname{div} \xi_h\,) - (\,q_h, \operatorname{div} e_h\,) = 0.$$

ここで，$\xi_h = 0$ とすると，$(\,q_h, \operatorname{div} e_h\,) = 0$．よって，

$$\nu(\,\nabla e_h, \nabla \xi_h\,) - (\,\varepsilon_h, \operatorname{div} \xi_h\,) = 0, \quad \forall \xi_h \in X_h^2.$$

この式を (3.5) に代入して，まとめると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) &= \nu(\,\nabla e_h, \nabla v\,) - (\,\varepsilon_h, \operatorname{div} v\,) - (\,q, \operatorname{div} e_h\,) - \nu(\,\nabla e_h, \nabla \xi_h\,) + (\,\varepsilon_h, \operatorname{div} \xi_h\,) \\ &= \nu(\,\nabla e_h, \nabla (v - \xi_h)\,) - (\,\varepsilon_h, \operatorname{div} (v - \xi_h)\,) - (\,q, \operatorname{div} e_h\,). \end{aligned}$$

右辺の e_h, ε_h をもとの形に戻し，Lemma 3.1を用いて変形を続行する．

$$\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q]) = \nu(\,\nabla(u-u_h),\nabla(v-\xi_h)\,) - (\,p-p_h,\mathrm{div}\,(v-\xi_h)\,) - (\,q,\mathrm{div}\,(u-u_h)\,)$$

$$= \nu(\,\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h,\nabla(v-\xi_h)\,) + \nu(\,\nabla u-\overline{\nabla}u_h,\nabla(v-\xi_h)\,) - (\,p-p_h,\mathrm{div}\,(v-\xi_h)\,) + (\,q,\mathrm{div}\,u_h\,)$$

$$= \nu(\,\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h,\nabla(v-\xi_h)\,) + \nu(\,-\Delta u+\overline{\Delta}u_h,v-\xi_h\,) + (\,\nabla(p-p_h),v-\xi_h\,) + (\,q,\mathrm{div}\,u_h\,)$$

$$= \nu(\,\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h,\nabla(v-\xi_h)\,) + (\,f+\nu\overline{\Delta}u_h-\nabla p_h,v-\xi_h\,) + (\,q,\mathrm{div}\,u_h\,)$$

$$\le \nu|\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h|_0\;|v-\xi_h|_1 + |\nu\overline{\Delta}u_h-\nabla p_h+f|_0|v-\xi_h|_0 + |\mathrm{div}\,u_h|_0\;|q|_0.$$

$\xi_h\in X_h^2$ は任意であったので，$v=(v_1,v_2)\in H_0^1(\Omega)$ の成分ごとの H_0^1-projection として定める．すなわち

$$\xi_h = (P_1v_1, P_1v_2).$$

従って (3.3), (3.4) を使って，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q]) &\le (\nu|\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h|_0 + C_0h|\nu\overline{\Delta}u_h-\nabla p_h+f|_0)|v|_1 + |\mathrm{div}\,u_h|_0\;|q|_0\\ &\le (\nu|\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h|_0 + C_0h|\nu\overline{\Delta}u_h-\nabla p_h+f|_0 + |\mathrm{div}\,u_h|_0)(|v|_1+|q|_0).\end{aligned}$$

以上の変形より，次の Lemma が成立

Lemma 3.3 Ω が convex polygonal のとき $\forall[v,q]\in\mathcal{S}$,

$$\frac{\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q])}{|v|_1+|q|_0} \le \nu|\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h|_0 + C_0h|\nu\overline{\Delta}u_h-\nabla p_h+f|_0 + |\mathrm{div}\,u_h|_0.$$

Theorem 2.1 と Lemma 3.3より，Stokes 方程式の有限要素近似に対する a posteriori estimates が成立する．

Theorem 3.1

$$C(u_h,p_h) \equiv \nu|\overline{\nabla}u_h-\nabla u_h|_0 + C_0h|\nu\overline{\Delta}u_h-\nabla p_h+f|_0 + |\mathrm{div}\,u_h|_0 \tag{3.6}$$

とおくとき，Stokes 方程式 (2.1) の解 $[u,p]$ と，(3.1) をみたす有限要素近似解 $[u_h,p_h]$ とのあいだには，次の a posteriori 誤差評価が成立する:

$$\begin{cases} |u-u_h|_1 \le \left(\dfrac{1}{\nu^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} C(u_h,p_h),\\ |p-p_h|_0 \le \left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{\nu}{\beta^2}\right) C(u_h,p_h).\end{cases} \tag{3.7}$$

【証明】
Theorem 2.1 を用いて，ただちに

$$\begin{cases} |u-u_h|_1 \le \left(\dfrac{1}{\nu^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \delta(e_h,\varepsilon_h),\\ |p-p_h|_0 \le \left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{\nu}{\beta^2}\right) \delta(e_h,\varepsilon_h).\end{cases}$$

一方，Lemma 3.3より

$$\delta(e_h,\varepsilon_h) = \sup_{[v,q]\in\mathcal{S}} \frac{\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q])}{|v|_1+|q|_0} \le C(u_h,p_h).$$

■

4 Numerical Examples

領域 Ω は $(0,1)\times(0,1)$ の正方領域，$\nu = 1$ として，Stokes 方程式を考える：

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{in} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in} \quad \Omega. \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

正方領域 Ω は矩形要素に等分割する．すなわち，要素を $\hat{\Omega}_k$，要素の総数を L とすれば，

$$\Omega = \sum_{k=1}^{L} \hat{\Omega}_k$$

と分割される．

x(または y) 軸方向の分割数を N とおく．分割の parameter h は $h = 1/N$ となる．

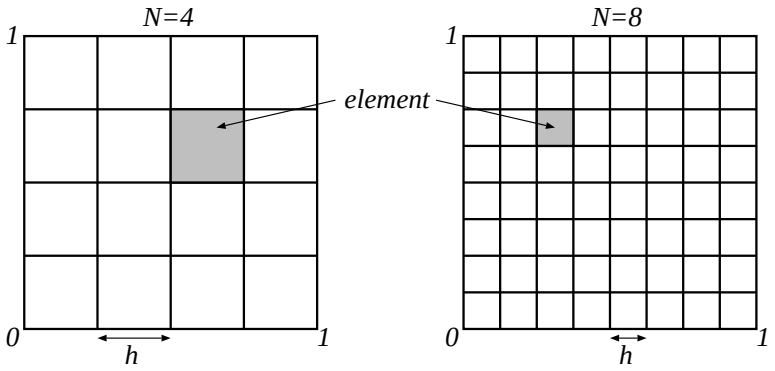

図 1: 領域の分割

有限要素空間 $X_h \subset H_0^1(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的二次要素 (piecewise bi-quadratic) を用いる．また，$Y_h \subset L^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的一次要素 (piecewise bi-linear) を用いる．

数値例 I

まずは，exact な解がわかっている場合を考える．

$f = (f_1, f_2)$ で，

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, \\ f_2 &= 8(10x - 30x^2 + 30x^3 - 15x^4 + 6x^5 - 60xy + 180x^2y - 120x^3y \\ &\quad -15y^2 + 90xy^2 - 180x^2y^2 + 120x^3y^2 + 30y^3 - 60xy^3 - 14y^4 + 30xy^4). \end{aligned}$$

とする．このとき，$u = (u_1, u_2)$ は

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= 20x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y), \\ u_2(x,y) &= 20y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x). \end{aligned}$$

また，p_h は $x = 0$ のとき 0 であるという条件を付加すれば，

$$p_h = 4x(-1+2y)(10x^2 - 15x^3 + 6x^4 - 10y + 30xy - 20x^2y + 10y^2 - 30xy^2 + 20x^2y^2)$$

が，(4.1) を満たす．

$||u_h||_{L^\infty(\Omega)} \approx 0.12$，$||p_h||_{L^\infty(\Omega)} \approx 4.27$ である．

圧力場，流速場を図示すると以下の通り．

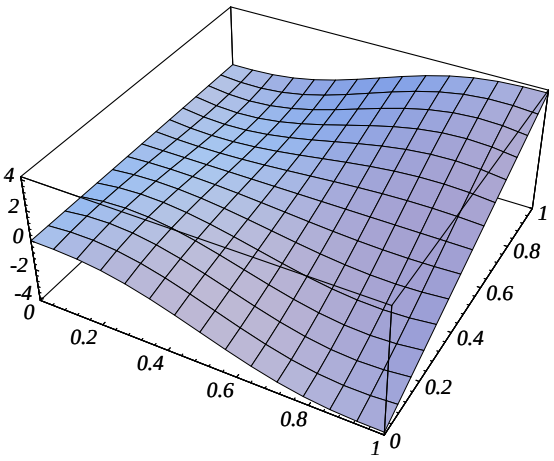

図 2: 圧力場 p

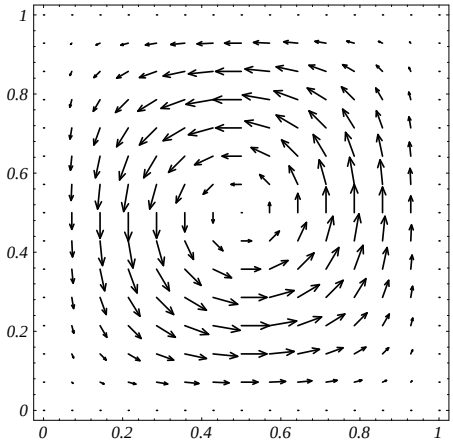

図 3: 流速場 $u = (u_1, u_2)$

数値計算は Fujitsu VP2600/10，および NEC SX-3/44R で行なった．言語は Fortran，精度は (一部四倍精度を含む) 倍精度計算．もちろん，数値結果には丸め誤差が混入しているため，正確な a posteriori 評価を得るためには有理数演算，または精度保証付きソフトウェアでの計算が必要である．

$C(u_h, p_h)$ の計算における，各 norm の値を図にすると以下の通り：

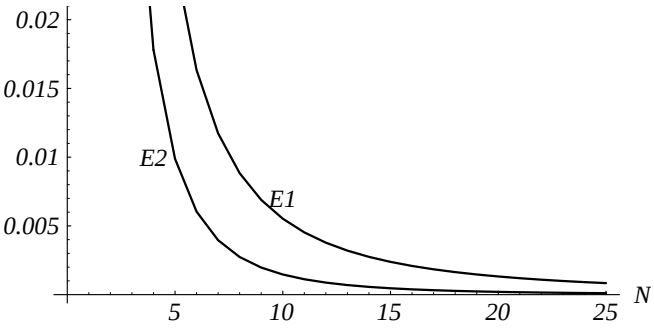

図 4: E1= $|\mathrm{div}\, u_h|_0$，E2= $|\overline{\nabla} u_h - \nabla u_h|_0$

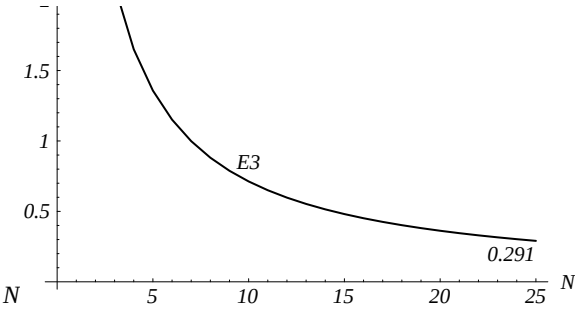

図 5: E3= $|\overline{\Delta} u_h - \nabla p_h + f|_0$

これによって得られる a posteriori 誤差評価の結果を示す：

N	$\|u - u_h\|_1$	$\|p - p_h\|_0$
5	0.21655	0.73072
10	0.05130	0.17309
15	0.02225	0.07506
20	0.01234	0.04162
25	0.00782	0.02639

a posteriori 誤差評価

図にすると次の通り：

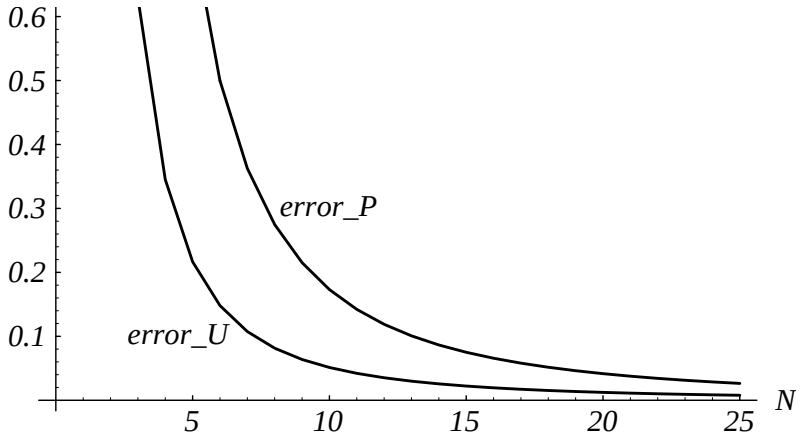

図 6: errorU= $|u-u_h|_1$ ， errorP=$|p-p_h|_0$

数値例 II

$f=(f_1,f_2)$ で，

$$\begin{aligned} f_1 &= 50(-2x+y+xy) \\ f_2 &= 20(1-5xy) \end{aligned}$$

として誤差評価を行なった．圧力 p には，$p(0,1)=0$ の条件を付加した．$||u_h||_{L^\infty(\Omega)} \approx 0.52$, $||p_h||_{L^\infty(\Omega)} \approx 22.72$ ． a posteriori 誤差評価と，圧力場，速度場は以下の通り：

N	$\|u-u_h\|_1$	$\|p-p_h\|_0$
5	1.39353	4.70242
10	0.34405	1.16099
15	0.15184	0.51237
20	0.08502	0.28689
25	0.05421	0.18292
30	0.00376	0.12660

a posteriori 誤差評価

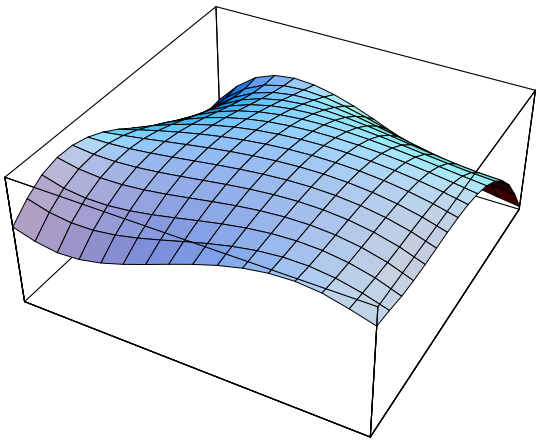

図 7: 圧力場 (例 2) p

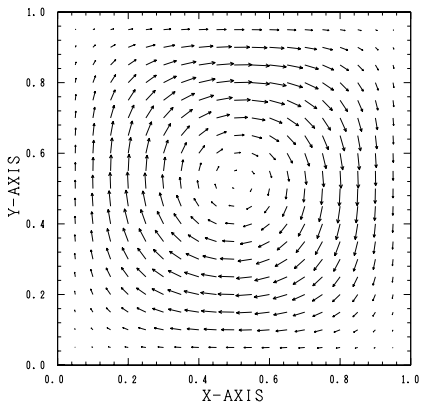

図 8: 流速場 $u=(u_1,u_2)$(例2)

参考文献

[1] Bank, R. E., Welfert, B. D. : A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**, 591–623 (1991).

[2] Grisvard, P. : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985).

[3] Horgan, C. O., Payne, L. E. : On Inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, 165–179 (1983).

[4] Nakao, M. T. : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems, *Japan J. Appl. Math.*, **5**, 313–332 (1988).

[5] Girault, V., Raviart, P. A. : *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Series in Computational Mathematics. Berlin Heidelberg New York : Springer (1986).

[6] Schultz, M. H. : *Spline Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jergey (1973).

[7] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations, *Numer. Math.*, **55**, 309–325 (1989).

[8] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations II non-conforming discretizations, *Numer. Math.*, **60**, 235–249 (1991).

[9] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimates for Nonlinear Problems. Finite Element Discretizations of Elliptic Equations, *Math. Comp.*, **62**, 445–475 (1994).

[10] Yamamoto, N., Nakao, M. T. : Numerical Verifications of Solutions for Elliptic Equations in Nonconvex Polygonal Domains, *Numer. Math.*, **65**, 503–521 (1993).