

楕円型方程式の解の数値的検証法に 対する一考察とその応用

渡部 善隆[†] 中尾 充宏[‡]

watanabe@cc.kyushu-u.ac.jp

[†]九州大学情報基盤センター

[‡]九州大学大学院数理学研究院

非線形楕円型境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

前処理済

Ω : \mathbf{R}^n ($n = 1, 2, 3$) の有界凸領域 .

$\partial\Omega$: 区分的に滑らか .

非線形楕円型境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

前処理済

Ω : \mathbf{R}^n ($n = 1, 2, 3$) の有界凸領域 .

$\partial\Omega$: 区分的に滑らか .

- f は $H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への連続写像 .
- 有界集合 $U \subset H^1(\Omega)$ に対し ,

$$f(\cdot, U, \nabla U) := \{f(\cdot, u, \nabla u) \mid u \in U\} \subset L^2(\Omega)$$

も有界 .

解の数値的検証

弱形式: find $u \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = (f(x, u, \nabla u), v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

解の数値的検証

弱形式: find $u \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = (f(x, u, \nabla u), v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

計算機援用により弱形式の近似解 u_h の周りで弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ の 存在 を 定量的誤差評価 付きで証明 .

解の数値的検証

弱形式: find $u \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = (f(x, u, \nabla u), v)_{L^2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

計算機援用により弱形式の近似解 u_h の周りで弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ の 存在 を 定量的誤差評価 付きで証明 .

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C,$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

$C > 0$: 数値的に決定可能.

解の存在証明と誤差評価

解の存在証明と誤差評価

手がかり



解の存在証明と誤差評価

手がかり

- f の構造
- 線形化問題の誤差評価



解の存在証明と誤差評価

手がかり

- f の構造
- 線形化問題の誤差評価



足がかり



解の存在証明と誤差評価

手がかり

- f の構造
- 線形化問題の誤差評価



足がかり

- 不動点定理
- Newton 型反復
- 線形計算の精度保証
 - 連立 1 次方程式
 - 固有値・特異値問題



線形化問題

任意の $g \in L^2(\Omega)$ に対し,

$$\begin{cases} -\Delta\phi = g, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

は唯一の解 $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ を持ち

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\phi\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{i,j=1}^n \|\partial^2\phi / \partial x_i \partial x_j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

線形化問題

任意の $g \in L^2(\Omega)$ に対し,

$$\begin{cases} -\Delta\phi = g, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

は唯一の解 $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ を持ち

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\phi\|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{i,j=1}^n \|\partial^2\phi/\partial x_i\partial x_j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

g から ϕ への対応関係を $\phi = Ag$ と定義

$A : L^2(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 全単射写像 .

不動点定式化

$\hat{I} : H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) : \text{恒等写像, compact.}$

不動点定式化

$\hat{I} : H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) : \text{恒等写像, compact.}$

$$F := \hat{I}Af : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega).$$

不動点定式化

$\hat{I} : H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) : \text{恒等写像, compact.}$

$$F := \hat{I}Af : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega).$$

弱形式は $H_0^1(\Omega)$ 内の不動点方程式:

$$u = F(\cdot, u, \nabla u)$$

と同値 .

不動点定式化

$\hat{I} : H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) : \text{恒等写像, compact.}$

$$F := \hat{I}Af : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega).$$

弱形式は $H_0^1(\Omega)$ 内の不動点方程式:

$$u = F(\cdot, u, \nabla u)$$

と同値 .

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{f} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{A} & H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\hat{I}} & H_0^1(\Omega) \\ u & \mapsto & f(u) & \mapsto & Af(u) & \mapsto & Fu \end{array}$$

不動点定式化

$\hat{I} : H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) : \text{恒等写像, compact.}$

$$F := \hat{I}Af : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega).$$

弱形式は $H_0^1(\Omega)$ 内の不動点方程式:

$$u = F(\cdot, u, \nabla u)$$

と同値 .

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{f} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{A} & H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\hat{I}} & H_0^1(\Omega) \\ u & \mapsto & f(u) & \mapsto & Af(u) & \mapsto & Fu \end{array}$$

$$f(u) := f(\cdot, u, \nabla u), \quad Fu := F(\cdot, u, \nabla u).$$

近似空間と projection

- S_h : $h > 0$ に依存する有限次元部分空間 .

近似空間と projection

- S_h : $h > 0$ に依存する有限次元部分空間 .
- 直交射影 $P_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow S_h$

$$(\nabla(\phi - P_h\phi), \nabla v_h)_{L^2} = 0, \quad \forall v_h \in S_h.$$

近似空間と projection

- S_h : $h > 0$ に依存する有限次元部分空間 .
- 直交射影 $P_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow S_h$

$$(\nabla(\phi - P_h\phi), \nabla v_h)_{L^2} = 0, \quad \forall v_h \in S_h.$$

- P_h の近似性

$$\|v - P_h v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch |v|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

近似空間と projection

- S_h : $h > 0$ に依存する有限次元部分空間 .
- 直交射影 $P_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow S_h$

$$(\nabla(\phi - P_h\phi), \nabla v_h)_{L^2} = 0, \quad \forall v_h \in S_h.$$

- P_h の近似性

$$\|v - P_h v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch |v|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

- Ω : 2次元矩形領域
 - S_h の基底を区分的双1次多項式にした場合 $C = 1/\pi$,
 - 区分的双2次多項式にした場合 $C = 1/(2\pi)$.
- Ω : 2次元多角形領域, 三角形一様分割, 各分割領域上で1次多項式となる S_h の場合 $C = 0.81$.

不動点方程式の分解

$$u = Fu$$

不動点方程式の分解

$$u = Fu \Leftrightarrow \begin{cases} P_h u = P_h F u, \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F u \end{cases}$$

不動点方程式の分解

$$u = Fu \Leftrightarrow \begin{cases} P_h u = P_h F u, \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F u \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_h u = N_h u, \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F u. \end{cases}$$

不動点方程式の分解

$$u = Fu \Leftrightarrow \begin{cases} P_h u = P_h F u, \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F u \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_h u = N_h u, \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F u. \end{cases}$$

$$N_h(u) := P_h u - [I - P_h F'(u_h)]_h^{-1} P_h (u - F u).$$

- $u_h \in S_h$: 近似解 .
- $[I - P_h F'(u_h)]_h^{-1}$: $P_h(I - F'(u_h))$ の定義域を S_h に制限した逆像.

不動点方程式の分解

$$u = Fu \Leftrightarrow \begin{cases} P_h u = P_h F u, \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F u \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_h u = N_h u, \\ (I - P_h)u = (I - P_h)F u. \end{cases}$$

$$N_h(u) := P_h u - [I - P_h F'(u_h)]_h^{-1} P_h (u - F u).$$

- $u_h \in S_h$: 近似解 .
- $[I - P_h F'(u_h)]_h^{-1}$: $P_h(I - F'(u_h))$ の定義域を S_h に制限した逆像.

$$Tu := N_h(u) + (I - P_h)F u.$$

$$u = Tu \Leftrightarrow u = Fu.$$

解の存在検証条件

$$U := u_h + U_h + U_*, \quad U_h \subset S_h, \quad U_* \subset S_h^\perp.$$

解の存在検証条件

$$U := u_h + U_h + U_*, \quad U_h \subset S_h, \quad U_* \subset S_h^\perp.$$

$U \subset H_0^1(\Omega)$: 有界凸閉集合,

$$\begin{cases} P_h T U - u_h \subset U_h, \\ (I - P_h) F U \subset U_* \end{cases}$$

解の存在検証条件

$$U := u_h + U_h + U_*, \quad U_h \subset S_h, \quad U_* \subset S_h^\perp.$$

$U \subset H_0^1(\Omega)$: 有界凸閉集合,

$$\begin{cases} P_h TU - u_h \subset U_h, \\ (I - P_h)FU \subset U_* \end{cases} \Leftrightarrow TU \subset U$$

解の存在検証条件

$$U := u_h + U_h + U_*, \quad U_h \subset S_h, \quad U_* \subset S_h^\perp.$$

$U \subset H_0^1(\Omega)$: 有界凸閉集合,

$$\begin{cases} P_h T U - u_h \subset U_h, \\ (I - P_h) F U \subset U_* \end{cases} \Leftrightarrow T U \subset U$$
$$\Leftrightarrow \exists u \in U \text{ such that } u = F u$$

解の存在検証条件

$$U := u_h + U_h + U_*, \quad U_h \subset S_h, \quad U_* \subset S_h^\perp.$$

$U \subset H_0^1(\Omega)$: 有界凸閉集合,

$$\begin{cases} P_h T U - u_h \subset U_h, \\ (I - P_h) F U \subset U_* \end{cases} \Leftrightarrow T U \subset U$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in U \text{ such that } u = F u$$

検証条件を満たすことが期待される $U \subset H_0^1(\Omega)$ を候補者集合 (candidate set) と呼ぶ .

候補者集合の構成 (無限次元部分)

$\alpha > 0$ に対して

$$U_* := \{u_* \in S_h^\perp \mid \|u_*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha, \|u_*\|_{L^2(\Omega)} \leq C\alpha\}$$

とする .

候補者集合の構成 (無限次元部分)

$\alpha > 0$ に対して

$$U_* := \{u_* \in S_h^\perp \mid \|u_*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha, \|u_*\|_{L^2(\Omega)} \leq C\alpha\}$$

とする .

S_h の有界閉集合 U_h と $U = u_h + U_h + U_*$ に対し

$$Ch \sup_{u \in U} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} < \alpha$$

となるとき , $(I - P_h)FU \subset U_*$ が満たされる .

候補者集合の構成 (有限次元部分)

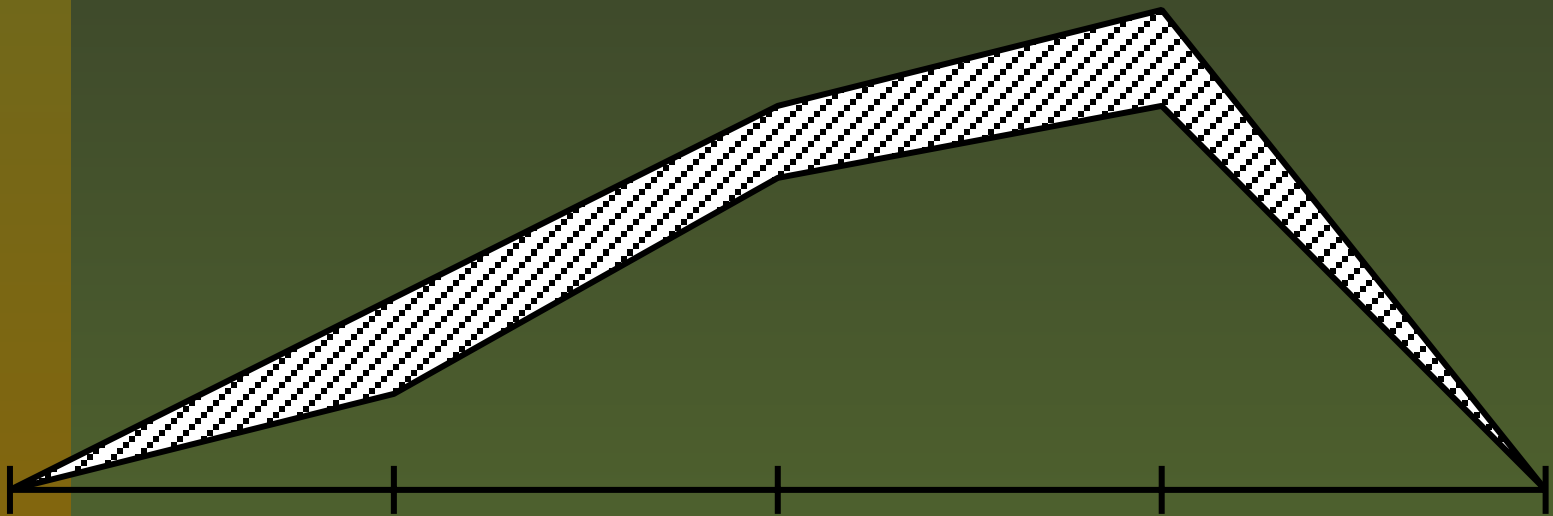
S_h の次元を K , 基底を $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq K}$ とする .

$$U_h := \left\{ \sum_{i=1}^K A_i \phi_i \subset S_h \mid A_i : \mathbf{R} \text{ の区間} \right\} .$$

候補者集合の構成 (有限次元部分)

S_h の次元を K , 基底を $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq K}$ とする .

$$U_h := \left\{ \sum_{i=1}^K A_i \phi_i \in S_h \mid A_i : \mathbf{R} \text{ の区間} \right\} .$$



検証条件 (有限次元部分)

- $G_{ij} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2} - (f'(u_h), \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i, j \leq K.$

検証条件 (有限次元部分)

- $G_{ij} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2} - (f'(u_h), \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i, j \leq K.$
- $\forall u = u_h + \hat{u}_h + u_* \in U, \hat{u}_h \in U_h, u_* \in U_*$ に対し
 $(f(u) - f'(u_h)\hat{u}_h, \phi_i)_{L^2} - (\nabla u_h, \nabla \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i \leq K$
を包み込む区間を f_i .

検証条件 (有限次元部分)

- $G_{ij} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2} - (f'(u_h), \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i, j \leq K.$
- $\forall u = u_h + \hat{u}_h + u_* \in U, \hat{u}_h \in U_h, u_* \in U_*$ に対し
 $(f(u) - f'(u_h)\hat{u}_h, \phi_i)_{L^2} - (\nabla u_h, \nabla \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i \leq K$
を包み込む区間を f_i .
- $f := [f_1, \dots, f_K]^T$.

検証条件 (有限次元部分)

- $G_{ij} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2} - (f'(u_h), \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i, j \leq K.$
- $\forall u = u_h + \hat{u}_h + u_* \in U, \hat{u}_h \in U_h, u_* \in U_*$ に対し
 $(f(u) - f'(u_h)\hat{u}_h, \phi_i)_{L^2} - (\nabla u_h, \nabla \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i \leq K$

を包み込む区間を f_i .

- $\mathbf{f} := [f_1, \dots, f_K]^T.$
- $\mathbf{x} := G^{-1} \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_K]^T.$

検証条件 (有限次元部分)

- $G_{ij} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2} - (f'(u_h), \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i, j \leq K.$
- $\forall u = u_h + \hat{u}_h + u_* \in U, \hat{u}_h \in U_h, u_* \in U_*$ に対し
 $(f(u) - f'(u_h)\hat{u}_h, \phi_i)_{L^2} - (\nabla u_h, \nabla \phi_i)_{L^2}, \quad 1 \leq i \leq K$

を包み込む区間を f_i .

- $f := [f_1, \dots, f_K]^T.$
- $x := G^{-1}f, \quad x = [x_1, \dots, x_K]^T.$

$$x_i \subset A_i, \quad 1 \leq i \leq K$$

が成り立つならば $P_h T U - u_h \subset U_h$ が満たされる.

アルゴリズム AL-1

- $k = 0$

初期値 $A_i^{(0)}$ ($1 \leq i \leq K$), $\alpha^{(0)} > 0$ を設定 .

- $k \geq 1$

1. 微小な $\varepsilon > 0$ に対して , $\hat{A}_i^{(k)} := (1 + \varepsilon)A_i^{(k-1)}$ ($1 \leq i \leq K$), $\hat{\alpha}^{(k)} := (1 + \varepsilon)\alpha^{(k-1)}$.
2. 候補者集合 $U^{(k)}$ を

$$U_h^{(k)} := \left\{ \sum_{i=1}^K \hat{A}_i \phi_i \in S_h \right\}, \quad U_*^{(k)} := \{v_* \in S_h^\perp \mid \|v_*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{\alpha}^{(k)}, \|v_*\|_{L^2(\Omega)} \leq C\hat{\alpha}^{(k)}\},$$

$U^{(k)} := u_h + U_h^{(k)} + U_*^{(k)}$ で構成 .

3. k 回目の反復パラメータを

$$\begin{aligned} f_i &:= (f(U^{(k)}) - f'(u_h)U_h^{(k)}, \phi_i)_{L^2} - (\nabla u_h, \nabla \phi_i)_{L^2}, \\ A_i^{(k)} &:= G^{-1}f, \\ \alpha^{(k)} &:= C \sup_{u \in U^{(k)}} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

で計算 .

4. $A_i^{(k)} \subset \hat{A}_i^{(k)}$ ($1 \leq i \leq K$), $\alpha^{(k)} \leq \hat{\alpha}^{(k)}$ ならば終了 . このとき $U^{(k)} \subset H_0^1(\Omega)$ 内に F の不動点が存在する .
5. 4. の条件が満たされない場合には $k := k + 1$ として 1. に戻る . k があらかじめ定めた最大反復回数を超えた場合 , またパラメータがあらかじめ定めた大きさを超えた場合には検証失敗 .

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

$$f(u) = \lambda u(u - a)(1 - u)$$

Allen-Cahn 方程式

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

$$f(u) = \lambda u(u - a)(1 - u)$$

$$f(u) = u^2$$

Allen-Cahn 方程式

Emden 方程式

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

$$f(u) = \lambda u(u - a)(1 - u)$$

$$f(u) = u^2$$

$$f(u) = \lambda \max\{u - 1, 0\}$$

Allen-Cahn 方程式

Emden 方程式

MHD 均衡問題

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

$$f(u) = \lambda u(u - a)(1 - u)$$

$$f(u) = u^2$$

$$f(u) = \lambda \max\{u - 1, 0\}$$

$$f(u) = -qu + \lambda u$$

Allen-Cahn 方程式

Emden 方程式

MHD 均衡問題

固有値問題

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

$$f(u) = \lambda u(u - a)(1 - u)$$

Allen-Cahn 方程式

$$f(u) = u^2$$

Emden 方程式

$$f(u) = \lambda \max\{u - 1, 0\}$$

MHD 均衡問題

$$f(u) = -qu + \lambda u$$

固有値問題

$$f(u) = \lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}}$$

Gelfand 方程式

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

$$f(u) = \lambda u(u - a)(1 - u)$$

Allen-Cahn 方程式

$$f(u) = u^2$$

Emden 方程式

$$f(u) = \lambda \max\{u - 1, 0\}$$

MHD 均衡問題

$$f(u) = -qu + \lambda u$$

固有値問題

$$f(u) = \lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}}$$

Gelfand 方程式

$$(\nabla u, \nabla v - u)_{L^2} \geq (f(u), v - u)$$

変分不等式

検証成功例 $-\Delta u = f(u)$

$$f(u) = \lambda u(u - a)(1 - u)$$

$$f(u) = u^2$$

$$f(u) = \lambda \max\{u - 1, 0\}$$

$$f(u) = -qu + \lambda u$$

$$f(u) = \lambda e^{\frac{u}{1+\varepsilon u}}$$

Allen-Cahn 方程式

Emden 方程式

MHD 均衡問題

固有値問題

Gelfand 方程式

$$(\nabla u, \nabla v - u)_{L^2} \geq (f(u), v - u)$$

$$-\Delta u + qu = \lambda u$$

変分不等式

q の再構成 (逆問題)

検証難儀例

$f(u)$ に微分項が入ると検証が困難になる場合がある。

検証難儀例

$f(u)$ に微分項が入ると検証が困難になる場合がある。

$$-u'' = Ku' + cu^3 - b \cos x \quad \text{Duffing 方程式}$$

検証難儀例

$f(u)$ に微分項が入ると検証が困難になる場合がある。

$$-u'' = Ku' + cu^3 - b \cos x \quad \text{Duffing 方程式}$$

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad \text{Navier-Stokes}$$

検証難儀例

$f(u)$ に微分項が入ると検証が困難になる場合がある。

$$-u'' = Ku' + cu^3 - b \cos x$$

Duffing 方程式

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f$$

Navier-Stokes

$$-\Delta u + p \cdot \nabla u + qu = \lambda u$$

非自己共役固有値問題

検証難儀例

$f(u)$ に微分項が入ると検証が困難になる場合がある。

$$-u'' = Ku' + cu^3 - b \cos x$$

Duffing 方程式

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f$$

Navier-Stokes

$$-\Delta u + p \cdot \nabla u + qu = \lambda u$$

非自己共役固有値問題

$$L^2 u + iaR[VL + V'']u = \lambda Lu$$
$$(L = -D^2 + a^2)$$

Orr-Sommerfeld 方程式

難儀理由Ⅰ

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分1次基底関数の場合

難儀理由Ⅰ

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分1次基底関数の場合

$$f_i = -(u_h + u_h', \phi_i')_{L^2} + (u_*', \phi_i)_{L^2}$$

難儀理由 I

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分 1 次基底関数の場合

$$f_i = \underbrace{-(u_h + u_h', \phi_i')}_{\text{微小}} + (u_*', \phi_i)_{L^2}$$

難儀理由 I

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分 1 次基底関数の場合

$$f_i = \underbrace{-(u_h + u_h', \phi_i')}_{\text{微小}} + (u_*', \phi_i)_{L^2}$$

難儀理由Ⅰ

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分1次基底関数の場合

$$f_i = \underbrace{-(u_h + u_h', \phi_i')_{L^2}}_{\text{微小}} + (u_*', \phi_i)_{L^2}$$

$$(u_*', \phi_i)_{L^2} \leq \|u_*'\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)}$$

難儀理由 I

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分 1 次基底関数の場合

$$f_i = \underbrace{-(u_h + u_h', \phi_i')_{L^2}}_{\text{微小}} + (u_*', \phi_i)_{L^2}$$

$$\begin{aligned} (u_*', \phi_i)_{L^2} &\leq \|u_*'\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \alpha \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

難儀理由 I

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分 1 次基底関数の場合

$$f_i = \underbrace{-(u_h + u_h', \phi_i')}_{\text{微小}} + (u_*', \phi_i)$$

$$\begin{aligned} (u_*', \phi_i)_{L^2} &\leq \|u_*'\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \alpha \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{\alpha(2h/3)^{1/2}}_{O(h^{1/2})} \end{aligned}$$

難儀理由 I

例: $-u'' = u'$

等分割, 区分 1 次基底関数の場合

$$f_i = \underbrace{-(u_h + u_h', \phi_i')}_{\text{微小}} + (u_*', \phi_i)_{L^2}$$

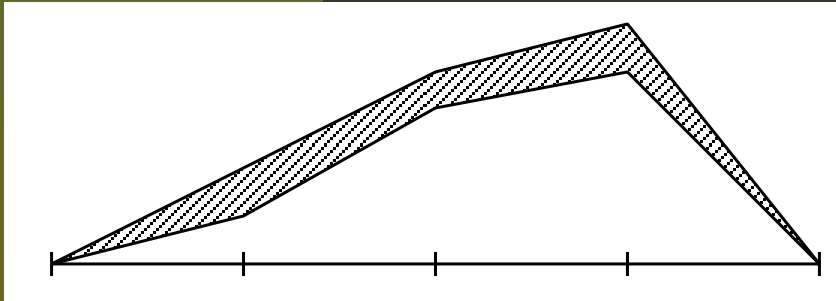
$$\begin{aligned} (u_*', \phi_i)_{L^2} &\leq \|u_*'\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \alpha \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{\alpha(2h/3)^{1/2}}_{O(h^{1/2})} \end{aligned}$$



近似度をあげても縮小が得られない場合が起こりうる

難儀理由 II

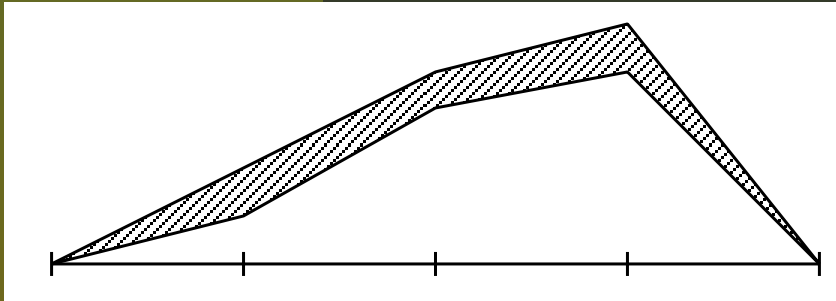
区間係数を持つ関数の微分



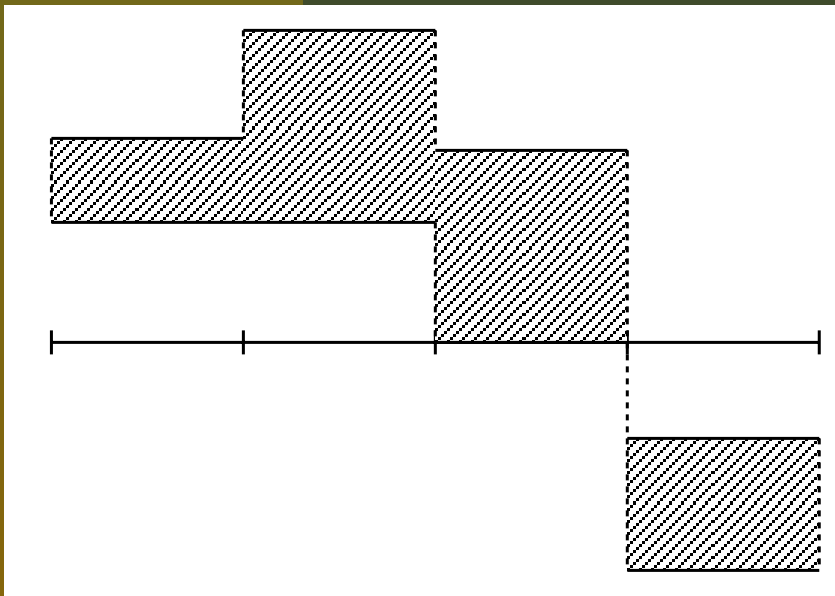
$$u_h = A_1\phi_1 + A_2\phi_2 + A_3\phi_3$$

難儀理由II

区間係数を持つ関数の微分



$$u_h = A_1\phi_1 + A_2\phi_2 + A_3\phi_3$$



$$u_h' = A_1\phi_1' + A_2\phi_2' + A_3\phi_3'$$

区間係数を持つ関数のノルムI

$$u_h = \sum_{i=1}^K A_i \phi_i, \quad A_i = [-1, 1] \times \delta, \quad \Omega = (0, 1).$$

$$\int_0^1 u_h^2 dx, \quad \int_0^1 (u_h')^2 dx$$

- 区間 1 次基底関数 (100 等分割)
- 区間 3 次 Hermite 関数 (100 等分割)
- $\{\sin(\pi i x)\} (1 \leq i \leq 100)$

区間係数を持つ関数のノルムII

$$\int_0^1 u_h^2 dx$$

δ	linear	Fourier	cubic Hermite
10^{-10}	9.87×10^{-21}	9.91×10^{-19}	9.89×10^{-21}
10^{-5}	9.87×10^{-11}	9.91×10^{-9}	9.89×10^{-11}
10^{-4}	9.87×10^{-9}	9.91×10^{-7}	9.89×10^{-9}
10^{-3}	9.87×10^{-7}	9.91×10^{-5}	9.89×10^{-7}
10^{-2}	9.87×10^{-5}	9.91×10^{-3}	9.89×10^{-5}
10^{-1}	9.87×10^{-3}	9.91×10^{-1}	9.89×10^{-3}

区間係数を持つ関数のノルムII

$$\int_0^1 u_h^2 dx$$

δ	linear	Fourier	cubic Hermite
10^{-10}	9.87×10^{-21}	9.91×10^{-19}	9.89×10^{-21}
10^{-5}	9.87×10^{-11}	9.91×10^{-9}	9.89×10^{-11}
10^{-4}	9.87×10^{-9}	9.91×10^{-7}	9.89×10^{-9}
10^{-3}	9.87×10^{-7}	9.91×10^{-5}	9.89×10^{-7}
10^{-2}	9.87×10^{-5}	9.91×10^{-3}	9.89×10^{-5}
10^{-1}	9.87×10^{-3}	9.91×10^{-1}	9.89×10^{-3}

$$\int_0^1 (u_h')^2 dx$$

δ	linear	Fourier	cubic Hermite
10^{-10}	3.95×10^{-16}	3.29×10^{-15}	4.74×10^{-16}
10^{-5}	3.95×10^{-6}	3.29×10^{-5}	4.74×10^{-6}
10^{-4}	3.95×10^{-4}	3.29×10^{-3}	4.74×10^{-4}
10^{-3}	3.95×10^{-2}	0.329	4.74×10^{-2}
10^{-2}	3.95	32.9	4.74
10^{-1}	395	3283	474

候補者集合(有限次元部分)の再設定

候補者集合 (有限次元部分) の再設定

パラメータ $\gamma > 0$ を用いて

$$U_h := \{ \hat{u}_h \in S_h \mid \|\hat{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \gamma \}$$

とノルム評価 .

候補者集合 (有限次元部分) の再設定

パラメータ $\gamma > 0$ を用いて

$$U_h := \{ \hat{u}_h \in S_h \mid \|\hat{u}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \gamma \}$$

とノルム評価 .

- $A = (A_{ij})$, $A_{ij} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i)_{L^2}$: 正定値対称行列.
- L : 下三角行列 such that $A = LL^T$.
- $\rho := \sup_{\|\mathbf{x}\|_E=1} \|L^T G^{-1} L \mathbf{x}\|_E$,
 $\|\cdot\|_E$ は Euclid ノルム .

検証条件 (有限次元部分)

$U = u_h + U_h + U_*$, $u \in U$ を

$$u = u_h + \hat{u}_h + u_*, \quad \hat{u}_h \in U_h, \quad u_* \in U_*$$

とおくとき,

$$\rho \sup_{u \in U} \|Fu - F'(u_h)\hat{u}_h - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} < \gamma$$

が成り立つならば $P_hTU - u_h \subset U_h$ が満たされる。

検証条件 (有限次元部分)

$U = u_h + U_h + U_*$, $u \in U$ を

$$u = u_h + \hat{u}_h + u_*, \quad \hat{u}_h \in U_h, \quad u_* \in U_*$$

とおくとき,

$$\rho \sup_{u \in U} \|Fu - F'(u_h)\hat{u}_h - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} < \gamma$$

が成り立つならば $P_h TU - u_h \subset U_h$ が満たされる。

$\|Fu - F'(u_h)\hat{u}_h - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}$ は Fu を u_h の周りで Taylor 展開したときの 2 階微分以降の残差に対応するもので、候補者集合のノルムに応じて小さくなることが期待される。

アルゴリズム AL-2

- $k = 0$
初期値 $\gamma^{(0)}, \alpha^{(0)} > 0$ を設定 .

- $k \geq 1$
 1. 微小な $\varepsilon > 0$ に対して ,

$$\hat{\gamma}^{(k)} := (1 + \varepsilon)\gamma^{(k-1)}, \quad \hat{\alpha}^{(k)} := (1 + \varepsilon)\alpha^{(k-1)}.$$

2. 候補者集合 $U^{(k)}$ を

$$U_h^{(k)} := \{\hat{v}_h \in S_h \mid \|\hat{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{\gamma}^{(k)}\}, \quad U_*^{(k)} := \{v_* \in S_h^\perp \mid \|v_*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{\alpha}^{(k)}\},$$

$$U^{(k)} := u_h + U_h^{(k)} + U_*^{(k)}$$

で構成 .

3. k 回目の反復パラメータを

$$\gamma^{(k)} := \sup_{u \in U^{(k)}} \rho \|Fu - F'(u_h)\hat{u}_h - u_h\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\alpha^{(k)} := C \sup_{u \in U^{(k)}} \|f(u)\|_{L^2(\Omega)},$$

で計算 .

4. $\gamma^{(k)} \leq \hat{\gamma}^{(k)}, \alpha^{(k)} \leq \hat{\alpha}^{(k)}$ ならば終了 . このとき $U^{(k)} \subset H_0^1(\Omega)$ 内に F の不動点が存在する .
5. 4. の条件が満たされない場合には $k := k + 1$ として 1. に戻る . k があらかじめ定めた最大反復回数を超えた場合 , またパラメータがあらかじめ定めた大きさを超えた場合には検証失敗 .

$$\rho = \|L^T G^{-1} L\|$$

$$\rho = \|L^T G^{-1} L\|$$

G は一般に非対称，方程式が連立系の場合 G^{-1} はある逆行列の一部の成分となる場合がある．

$$\rho = \|L^T G^{-1} L\|$$

G は一般に非対称，方程式が連立系の場合 G^{-1} はある逆行列の一部の成分となる場合がある．

- $L^T G^{-1} L$ の最大特異値の上界

$$\rho = \|L^T G^{-1} L\|$$

G は一般に非対称，方程式が連立系の場合 G^{-1} はある逆行列の一部の成分となる場合がある．

- $L^T G^{-1} L$ の最大特異値の上界
- $L^{-1} G L^{-T}$ の最小特異値の下界の逆数

$$\rho = \|L^T G^{-1} L\|$$

G は一般に非対称，方程式が連立系の場合 G^{-1} はある逆行列の一部の成分となる場合がある．

- $L^T G^{-1} L$ の最大特異値の上界
- $L^{-1} G L^{-T}$ の最小特異値の下界の逆数
 - G^{-1} の包み込み
 - 区間 Cholesky 分解 $A = LL^T$
 - $W := L^T G^{-1} L$
 - $W^T W$ の最大固有値の評価

$$\rho = \|L^T G^{-1} L\|$$

G は一般に非対称，方程式が連立系の場合 G^{-1} はある逆行列の一部の成分となる場合がある．

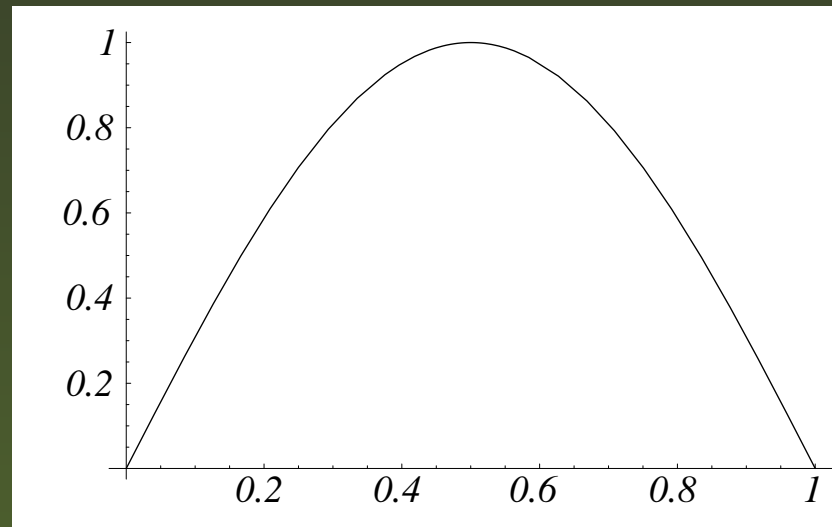
- $L^T G^{-1} L$ の最大特異値の上界
- $L^{-1} G L^{-T}$ の最小特異値の下界の逆数
 - G^{-1} の包み込み
 - 区間 Cholesky 分解 $A = LL^T$
 - $W := L^T G^{-1} L$
 - $W^T W$ の最大固有値の評価

⇒ 工夫が必要！

例題

$$\begin{cases} -u'' + au' + u = f, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

真の解が $u = \sin(\pi x)$ となるように f を定める .



計算環境

- Sun マイクロシステムズ社 Forte Fortran
<http://www.sun.co.jp/workshop/>
- 倍精度・4倍精度区間変数

コンパイラ	Forte Fortran Desktop Edition 6 update 1
OS	SunOS 5.7
計算機	FUJITSU GP7000F model 900 SUN Ultra5 model 360

数値例 I ($-u'' + au' + u = f$)

S_h : 区分 1 次基底関数 (N 等分)

$$u \in u_h + U_h + U_*$$

a	AL-1				AL-2			
	$\max_i A_i $		$\ U_*\ _{H_0^1(\Omega)}$		$\ U_h\ _{H_0^1(\Omega)}$		$\ U_*\ _{H_0^1(\Omega)}$	
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$
0	0.00009	0.00004	0.02309	0.01173	0.00008	0.00002	0.02224	0.01112
0.1	0.00868	0.01536	0.07346	0.09360	0.00260	0.12755	0.02226	0.01112
0.2	0.03727	0.07194	0.16059	0.22073	0.00511	0.00254	0.02227	0.01113
0.5	0.36826	0.72471	0.64288	0.89934	0.01265	0.00629	0.02231	0.01114
1	3.50529	11.2050	3.10837	7.04550	0.02509	0.01248	0.02239	0.01115
5	×	×	×	×	0.11886	0.05841	0.02298	0.01130
10	×	×	×	×	0.24256	0.11715	0.02378	0.01149
20	×	×	×	×	0.51963	0.24148	0.02557	0.01189
30	×	×	×	×	0.84179	0.37479	0.02766	0.01232
40	×	×	×	×	1.22320	0.51875	0.03015	0.01278
50	×	×	×	×	1.67615	0.67357	0.03310	0.01328

数値例 II ($-u'' + au' + u = f$)

S_h : 区分 3 次 Hermite 基底関数 (N 等分)

$$u \in u_h + U_h + U_*$$

a	AL-1				AL-2			
	$\max_i A_i $		$\ U_*\ _{H_0^1(\Omega)}$		$\ U_h\ _{H_0^1(\Omega)}$		$\ U_*\ _{H_0^1(\Omega)}$	
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$
0	0.00032	0.00013	0.02222	0.01111	0.00009	0.00026	0.02244	0.11162
0.1	0.01153	0.00816	0.02267	0.01166	0.00263	0.00154	0.02245	0.01117
0.2	0.02584	0.02199	0.02541	0.01558	0.00517	0.00281	0.02247	0.01117
0.5	0.23227	0.41450	0.08843	0.11310	0.01277	0.00660	0.02251	0.01118
1	3.55521	13.5337	0.63154	1.72262	0.02532	0.01284	0.02258	0.01120
5	×	×	×	×	0.11991	0.05908	0.02319	0.01135
10	×	×	×	×	0.24466	0.11808	0.02399	0.01154
20	×	×	×	×	0.52457	0.24291	0.02582	0.01194
30	×	×	×	×	0.85455	0.37696	0.02809	0.01238
40	×	×	×	×	1.26288	0.52267	0.03113	0.01287
50	×	×	×	×	1.79086	0.68157	0.03538	0.01343

数値例 III ($-u'' + au' + u = f$)

$$S_h = \left\{ \sum_{n=1}^N \sin(\pi nx) \right\}$$

$$u \in u_h + U_h + U_*$$

a	AL-1				AL-2			
	$\max_i A_i $		$\ U_*\ _{H_0^1(\Omega)}$		$\ U_h\ _{H_0^1(\Omega)}$		$\ U_*\ _{H_0^1(\Omega)}$	
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$
0	0.00008	0.00002	0.02200	0.01106	0.00008	0.00002	0.02202	0.01106
0.1	0.00027	0.00013	0.02201	0.01106	0.00257	0.00127	0.02204	0.01107
0.2	0.00052	0.00026	0.02202	0.01106	0.00506	0.00252	0.02205	0.01107
0.5	0.00131	0.00066	0.02204	0.01107	0.01252	0.00626	0.02209	0.01108
1	0.00268	0.00134	0.02208	0.01108	0.02484	0.10242	0.02216	0.01110
5	0.01266	0.00625	0.02257	0.01120	0.11763	0.05811	0.02275	0.01124
10	0.01996	0.00969	0.02354	0.01141	0.23988	0.11654	0.02354	0.01143
20	0.03141	0.01351	0.02821	0.01210	0.51276	0.24009	0.02524	0.01182
30	0.10637	0.01749	0.08416	0.01378	0.82771	0.37235	0.02722	0.01224
40	×	0.02726	×	0.01982	1.19676	0.51479	0.02955	0.01269
50	×	×	×	×	1.62969	0.66748	0.03228	0.01317

応用: Orr-Sommerfeld 方程式

$a, R > 0$ が与えられたとき, 平行 Poiseuille 流れの安定性に関する Orr-Sommerfeld 方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} (-D^2 + a^2)^2 u + iaR[V(-D^2 + a^2) + V'']u = \lambda(-D^2 + a^2)u, \\ u(-1) = u(1) = u'(-1) = u'(1) = 0, \\ V = 1 - x^2 \end{array} \right.$$

の固有対 $[\lambda, u]^T$ を精度保証付きで求める .

λ の実部の符号を調べる .

$\text{Re } \lambda > 0$ ならば安定 , $\text{Re } \lambda < 0$ ならば不安定 .

検証例 I

$$R = 5769, a = 1.0174,$$

S_h : 区分的 3 次 Hermite 基底関数 (650 等分割)

$$U = u_h + U_h + U_*$$

$$U_h = [V_h, W_h, \sigma, \mu]^T, \quad U_* = [V_*, W_*, 0, 0]^T$$

$$\|V_h\|_D \leq 0.001037, \quad \|W_h\|_D \leq 0.001062,$$

$$\|V_*\|_D \leq 0.008917, \quad \|W_*\|_D \leq 0.005252.$$

$$\|v\|_D := \|(-D^2 + a)v\|_{L^2(0,1)}$$

$$\lambda \in [0.0028, 0.0819] + i[1547.4666, 1547.5475].$$

検証例 II

$$R = 5778, a = 1.0174,$$

S_h : 区分的 3 次 Hermite 基底関数 (650 等分割)

$$U = u_h + U_h + U_*$$

$$U_h = [V_h, W_h, \sigma, \mu]^T, \quad U_* = [V_*, W_*, 0, 0]^T$$

$$\|V_h\|_D \leq 0.001041, \quad \|W_h\|_D \leq 0.001066,$$

$$\|V_*\|_D \leq 0.008934, \quad \|W_*\|_D \leq 0.005261.$$

$$\|v\|_D := \|(-D^2 + a)v\|_{L^2(0,1)}$$

$$\lambda \in [-0.0086, -0.0067] + i[1549.4610, 1549.5422].$$

今後の課題

今後の課題

- AL-1 と AL-2 の比較実験

今後の課題

- AL-1 と AL-2 の比較実験
- 線形楕円型逆作用素の存在検証
$$L = -\Delta u + b \cdot \nabla u + cu$$

今後の課題

- AL-1 と AL-2 の比較実験

- 線形楕円型逆作用素の存在検証

$$L = -\Delta u + b \cdot \nabla u + cu$$

- Navier-Stokes 方程式

$$-\nu \Delta u + \nabla p = -(u \cdot \nabla)u + f$$

今後の課題

- AL-1 と AL-2 の比較実験
- 線形楕円型逆作用素の存在検証
$$L = -\Delta u + b \cdot \nabla u + cu$$
- Navier-Stokes 方程式
$$-\nu \Delta u + \nabla p = -(u \cdot \nabla)u + f$$
- 線形計算の高速化
 - 最小特異値の下界
 - 逆行列 + 最大特異値の上界