精度保証付き数値計算のエッセンス

—微分方程式編—

渡部 善隆

watanabe@cc.kyushu-u.ac.jp

九州大学情報基盤センター

微分方程式

例: Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0\end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}$: 流速ベクトル, p: 圧力場, ν : 動粘性率

微分方程式

例: Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} &= 0\end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}$: 流速ベクトル, p: 圧力場, ν : 動粘性率

精度保証付き数値計算の目的

微分方程式

例: Navier-Stokes 方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{u} &= 0
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{u}$: 流速ベクトル, p: 圧力場, ν : 動粘性率

精度保証付き数値計算の目的

適切な関数空間 X において,

微分方程式

例: Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0\end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}$: 流速ベクトル, p: 圧力場, ν : 動粘性率

精度保証付き数値計算の目的

適切な関数空間 X において,

近似解 $\hat{u}$ の近くに厳密解 u の存在を

微分方程式

例: Navier-Stokes 方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{u}$: 流速ベクトル, p: 圧力場, ν : 動粘性率

精度保証付き数値計算の目的

適切な関数空間 X において,
近似解 $\hat{u}$ の近くに厳密解 u の存在を
定量的な誤差評価 $\|u-\hat{u}\|_X$ 付きで保証する.

微分方程式の解と近似解

微分方程式の解と近似解

- 解は無限次元空間に属する

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \phi_i \qquad \phi_i \in X : \text{基底}$$

微分方程式の解と近似解

- 解は無限次元空間に属する

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \phi_i \qquad \phi_i \in X : \text{基底}$$

- 近似解は (通常) 有限次元空間に属する

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i \, \phi_i$$

微分方程式の解と近似解

- 解は無限次元空間に属する

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \phi_i \qquad \phi_i \in X : \text{基底}$$

- 近似解は (通常) 有限次元空間に属する

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i \, \phi_i$$

- 数値計算の結果として得られる係数 $\{\hat{a}_i\}_{i=1}^{N}$ は (通常) 浮動小数点数

微分方程式の解と近似解

- 解は無限次元空間に属する

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \phi_i \qquad \phi_i \in X : \text{基底}$$

- 近似解は (通常) 有限次元空間に属する

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i \, \phi_i$$

- 数値計算の結果として得られる係数 $\{\hat{a}_i\}_{i=1}^{N}$ は (通常) 浮動小数点数

$$\Rightarrow \boxed{u - \hat{u} \text{ の事後誤差評価が欲しい}}$$

離散化誤差

無限次元の問題を有限次元化した際に生じるギャップ

例) Emden 方程式:

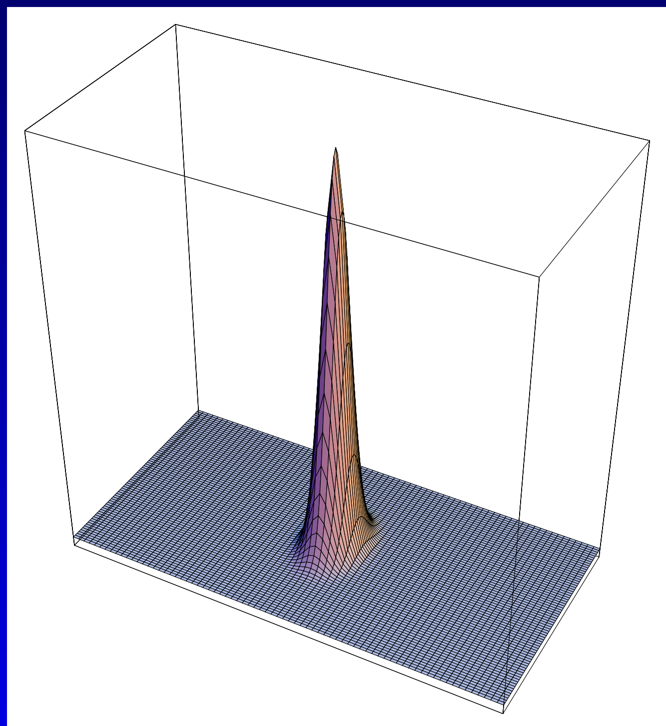
$$\begin{cases} -\Delta u = & u^2 \quad \text{in} \quad \Omega_\xi = (0,\xi) \times (0,1/\xi), \\ u = & 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_\xi. \end{cases}$$

離散化誤差

無限次元の問題を有限次元化した際に生じるギャップ

例) Emden 方程式:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in} \quad \Omega_\xi = (0,\xi)\times(0,1/\xi), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega_\xi. \end{cases}$$



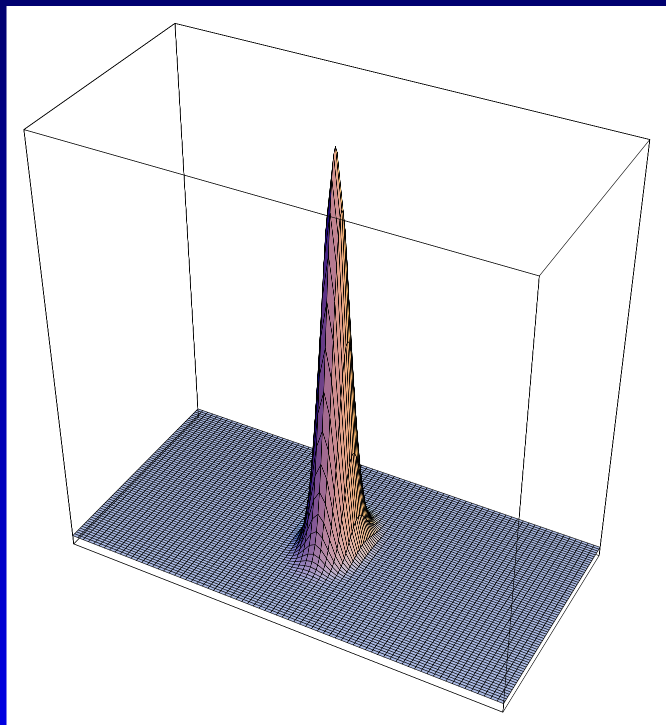
symmetric solution

離散化誤差

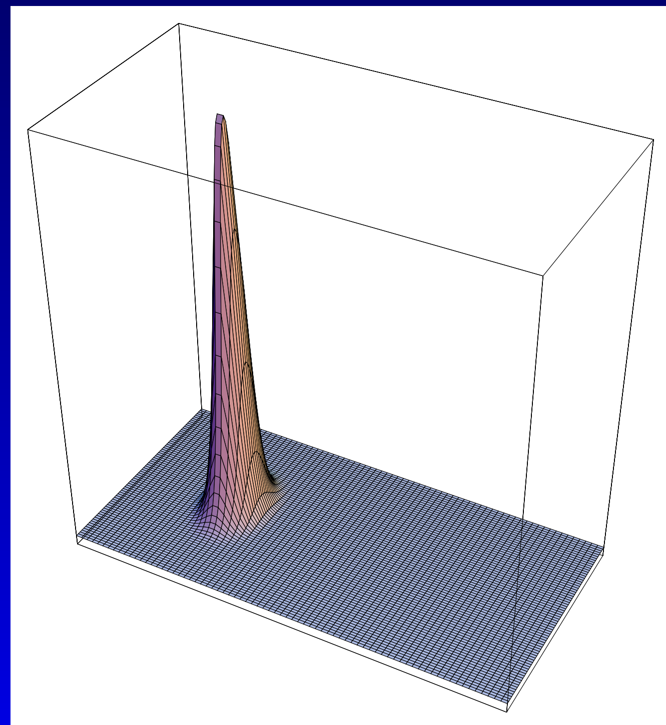
無限次元の問題を有限次元化した際に生じるギャップ

例) Emden 方程式:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in} \quad \Omega_\xi = (0,\xi)\times(0,1/\xi), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega_\xi. \end{cases}$$



symmetric solution



“spurious” approximation

解の存在検証例

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式
- 楕円型作用素のポテンシャル関数の再構成

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式
- 楕円型作用素のポテンシャル関数の再構成
- 定常 Navier-Stokes 方程式

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式
- 楕円型作用素のポテンシャル関数の再構成
- 定常 Navier-Stokes 方程式
- driven cavity problem

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題(固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式
- 楕円型作用素のポテンシャル関数の再構成
- 定常 Navier-Stokes 方程式
- driven cavity problem
- Rayleigh-Bénard convection

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式
- 楕円型作用素のポテンシャル関数の再構成
- 定常 Navier-Stokes 方程式
- driven cavity problem
- Rayleigh-Bénard convection
- Orr-Sommerfeld 方程式

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式
- 楕円型作用素のポテンシャル関数の再構成
- 定常 Navier-Stokes 方程式
- driven cavity problem
- Rayleigh-Bénard convection
- Orr-Sommerfeld 方程式
- Duffing 方程式

解の存在検証例

- 非線形楕円型方程式
- 特異摂動問題
- 楕円型固有値問題 (固有値の存在および非存在)
- Gelfand 方程式
- 楕円型作用素のポテンシャル関数の再構成
- 定常 Navier-Stokes 方程式
- driven cavity problem
- Rayleigh-Bénard convection
- Orr-Sommerfeld 方程式
- Duffing 方程式
- 自励振動系における対称性破壊分岐解

テキスト

精度保証付き数値計算

チュートリアル応用数理の最前線

中尾充宏・山本野人 共著

日本評論社

149+vi ページ（1998）

九大の数学研究は、我が国でもっとも早くから計算機に関連する体系的な研究で成果を挙げるなど、研究上の冒険心や先見性を発揮してきた。さらなる研鑽と充実を重

解の存在検証手順

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

$F : X \longrightarrow Y$: 非線形作用素

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

$F : X \longrightarrow Y$: 非線形作用素

- 準 Newton 作用素による不動点定式化

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

$F : X \longrightarrow Y$: 非線形作用素

- 準 Newton 作用素による不動点定式化

$$\boxed{Tu = u \quad \text{in} \quad X}$$

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

$$F : X \longrightarrow Y\text{: 非線形作用素}$$

- 準 Newton 作用素による不動点定式化

$$\boxed{Tu = u \quad \text{in} \quad X}$$

$$Tu := u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

$F : X \longrightarrow Y$: 非線形作用素

- 準 Newton 作用素による不動点定式化

$$\boxed{Tu = u \quad \text{in} \quad X}$$

$$Tu := u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

$F'[\hat{u}] : X \longrightarrow Y$: 線形作用素

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

$F : X \longrightarrow Y$: 非線形作用素

- 準 Newton 作用素による不動点定式化

$$\boxed{Tu = u \quad \text{in} \quad X}$$

$$Tu := u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

$F'[\hat{u}] : X \longrightarrow Y$: 線形作用素 ←とりあえず全単射性を仮定

解の存在検証手順

- 問題

$$\boxed{\text{find} \quad u \in X \quad \text{such that} \quad Fu = 0}$$

$F : X \longrightarrow Y$: 非線形作用素

- 準 Newton 作用素による不動点定式化

$$\boxed{Tu = u \quad \text{in} \quad X}$$

$$Tu := u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

$F'[\hat{u}] : X \longrightarrow Y$: 線形作用素 ←とりあえず全単射性を仮定

- $u \in X$ が T の不動点 $\Rightarrow$ $Fu = 0$

準 Newton 作用素

$$Tu = u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

準 Newton 作用素

$$Tu = u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

は Newton-Raphson 法のアルゴリズム

$$u_{n+1} = u_n - F'[u_n]^{-1} F u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

に由来.

準 Newton 作用素

$$Tu = u - F'[\hat{u}]^{-1}Fu$$

は Newton-Raphson 法のアルゴリズム

$$u_{n+1} = u_n - F'[u_n]^{-1}Fu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

に由来．　近似解が十分真の解に近ければ収束 (収縮) が期待される．

準 Newton 作用素

$$Tu = u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

は Newton-Raphson 法のアルゴリズム

$$u_{n+1} = u_n - F'[u_n]^{-1} F u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

に由来．近似解が十分真の解に近ければ収束 (収縮) が期待される．

「非線形方程式に対しては，局所的に線形方程式で近似することを繰り返して解の近似値を求める Newton 法がすべての基本である．」

『数値計算法の数理』杉原 正顯，室田 一雄

準Newton作用素

$$Tu = u - F'[\hat{u}]^{-1} Fu$$

はNewton-Raphson法のアルゴリズム

$$u_{n+1} = u_n - F'[u_n]^{-1} F u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

に由来．近似解が十分真の解に近ければ収束(収縮)が期待される．

「関数空間上で定義された非線形作用素方程式に対してもニュートン法が定義され，きわめて有力な解法となる」

『非線形解析入門』大石 進一

無限次元不動点定理

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)
- Schauder の不動点定理

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)
- Schauder の不動点定理

$$\boxed{TU \subset U}$$

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)
- Schauder の不動点定理

$$\boxed{TU \subset U}$$

$U \subset X$: 候補者集合 (candidate set)

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)
- Schauder の不動点定理

$$\boxed{TU \subset U}$$

$U \subset X$: 候補者集合 (candidate set)

- $TU \subset U$

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)
- Schauder の不動点定理

$$\boxed{\boxed{TU \subset U}}$$

$U \subset X$: 候補者集合 (candidate set)

- $TU \subset U \quad \Leftarrow \; Tu \in U, \quad \forall u \in U$

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)
- Schauder の不動点定理

$$\boxed{TU \subset U}$$

$U \subset X$: 候補者集合 (candidate set)

- $TU \subset U \quad \Leftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U$
- 候補者集合 U を

  "近似解 + 原点中心の微小なボール"

  に設定

無限次元不動点定理

- 縮小写像原理 (Banach の不動点定理)
- Schauder の不動点定理

$$\boxed{TU \subset U}$$

$U \subset X$: 候補者集合 (candidate set)

- $TU \subset U \quad \Leftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U$
- 候補者集合 U を

“近似解 + 原点中心の微小なボール”

に設定

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

収縮のための十分条件

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \varepsilon\}$$

$TU \subset U$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \varepsilon\}$$

$TU \subset U \ \longleftarrow$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

$$TU \subset U \quad \longleftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} TU \subset U \ &\longleftarrow \ Tu \in U, \quad \forall u \in U \\ &\longleftarrow \ T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \end{aligned}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} TU \subset U \ &\longleftarrow\ Tu \in U, \quad \forall u \in U \\ &\longleftarrow\ T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\ &\longleftarrow \end{aligned}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} TU \subset U \quad &\longleftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U \\ &\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\ &\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) - \hat{u} \in W, \quad \forall w \in W \end{aligned}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} TU \subset U \;\; &\longleftarrow \;\; Tu \in U, \quad \forall u \in U \\ &\longleftarrow \;\; T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\ &\longleftarrow \;\; T(\hat{u} + w) - \hat{u} \in W, \quad \forall w \in W \\ &\longleftarrow \end{aligned}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned} TU \subset U \quad &\longleftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U \\ &\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\ &\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) - \hat{u} \in W, \quad \forall w \in W \\ &\longleftarrow \quad \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon, \quad \forall w \in W \end{aligned}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned}
TU \subset U \quad \longleftarrow \quad & Tu \in U, \quad \forall u \in U \\
\longleftarrow \quad & T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\
\longleftarrow \quad & T(\hat{u} + w) - \hat{u} \in W, \quad \forall w \in W \\
\longleftarrow \quad & \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \leq \varepsilon, \quad \forall w \in W \\
\longleftarrow \quad &
\end{aligned}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned}
TU \subset U \quad &\longleftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U \\
&\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) - \hat{u} \in W, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \leq \varepsilon, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad \sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned}
TU \subset U \quad &\longleftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U \\
&\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) - \hat{u} \in W, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \leq \varepsilon, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad \sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

目標:

収縮のための十分条件

$$U = \hat{u} + W, \quad W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \varepsilon\}$$

$$\begin{aligned}
TU \subset U \quad &\longleftarrow \quad Tu \in U, \quad \forall u \in U \\
&\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) \in \hat{u} + W, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad T(\hat{u} + w) - \hat{u} \in W, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon, \quad \forall w \in W \\
&\longleftarrow \quad \sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon
\end{aligned}$$

目標: $\sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X$ を上から評価する

$TU \subset U$ の十分条件

近似解 $\hat{u}$ と

$$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \varepsilon\}$$

に対して

$$\sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon$$

が成立すれば，$Tu = u$ の解 u が $\hat{u} + W$ 内に存在する．さらに u は $Fu = 0$ を満たす．

$TU \subset U$ の十分条件

近似解 $\hat{u}$ と

$$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

に対して

$$\sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \leq \varepsilon$$

が成立すれば，$Tu = u$ の解 u が $\hat{u} + W$ 内に存在する．さらに u は $Fu = 0$ を満たす.

- 解の存在証明
- 定量的誤差評価
- 近似スキームの信頼性

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \leq \varepsilon$$

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon$$

T を F で書き直すと

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\sup_{w \in W} \|T(\hat{u}+w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon$$

T を F で書き直すと

$$\sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]^{-1}(\,F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\,)\|_X \le \varepsilon$$

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\sup_{w \in W} \| T(\hat{u} + w) - \hat{u} \|_X \le \varepsilon$$

T を F で書き直すと

$$\sup_{w \in W} \| F'[\hat{u}]^{-1} (F'[\hat{u}]w - F(\hat{u} + w)) \|_X \le \varepsilon$$

ノルム評価による $TU \subset U$ の十分条件:

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\sup_{w \in W} \|T(\hat{u}+w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon$$

T を F で書き直すと

$$\sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]^{-1}(\,F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\,)\|_X \le \varepsilon$$

ノルム評価による $TU \subset U$ の十分条件:

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \le \varepsilon$$

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\sup_{w \in W} \|T(\hat{u} + w) - \hat{u}\|_X \le \varepsilon$$

T を F で書き直すと

$$\sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]^{-1}(\,F'[\hat{u}]w - F(\hat{u} + w)\,)\|_X \le \varepsilon$$

ノルム評価による $TU \subset U$ の十分条件:

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u} + w)\|_Y \le \varepsilon$$

【注意】
線形化逆作用素のノルム評価を回避する
方法もある→ 中尾・山本のテキスト参照

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \leq \varepsilon$$

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \leq \varepsilon$$

- $F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w) \approx F\hat{u}$

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \leq \varepsilon$$

- $F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w) \approx F\hat{u}$

$$\left(\lim_{v \to 0} \frac{\|F(\hat{u}+v) - F(\hat{u}) - F'[\hat{u}]v\|_Y}{\|v\|_X} = 0 \right)$$

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \le \varepsilon$$

- $F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w) \approx F\hat{u}$

$$\left(\lim_{v \to 0} \frac{\|F(\hat{u}+v) - F(\hat{u}) - F'[\hat{u}]v\|_Y}{\|v\|_X} = 0 \right)$$

  - 小さいことが期待される

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \leq \varepsilon$$

- $F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w) \approx F\hat{u}$
$$\left(\lim_{v \to 0} \frac{\|F(\hat{u}+v) - F(\hat{u}) - F'[\hat{u}]v\|_Y}{\|v\|_X} = 0 \right)$$
  - 小さいことが期待される
  - $\hat{u}$ の情報を用いたきめ細かい評価が必要

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \le \varepsilon$$

- $F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w) \approx F\hat{u}$

  $$\left(\lim_{v \to 0} \frac{\|F(\hat{u}+v) - F(\hat{u}) - F'[\hat{u}]v\|_Y}{\|v\|_X} = 0 \right)$$

  - 小さいことが期待される
  - $\hat{u}$ の情報を用いたきめ細かい評価が必要
- $\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)}$ の評価

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \le \varepsilon$$

- $F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w) \approx F\hat{u}$

  $$\left(\lim_{v \to 0} \frac{\|F(\hat{u}+v) - F(\hat{u}) - F'[\hat{u}]v\|_Y}{\|v\|_X} = 0 \right)$$

  - 小さいことが期待される
  - $\hat{u}$ の情報を用いたきめ細かい評価が必要
- $\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)}$ の評価
  - 存在だけでなく上界の具体的な値が必要

$TU \subset U$ の十分条件・つづき

$$\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)} \sup_{w \in W} \|F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w)\|_Y \le \varepsilon$$

- $F'[\hat{u}]w - F(\hat{u}+w) \approx F\hat{u}$

  $$\left(\lim_{v \to 0} \frac{\|F(\hat{u}+v) - F(\hat{u}) - F'[\hat{u}]v\|_Y}{\|v\|_X} = 0 \right)$$

  - 小さいことが期待される
  - $\hat{u}$ の情報を用いたきめ細かい評価が必要
- $\|F'[\hat{u}]^{-1}\|_{B(Y,X)}$ の評価
  - 存在だけでなく上界の具体的な値が必要
  - 大きな問題

線形化逆作用素のノルム評価I

$$L := F'[\hat{u}] : X \longrightarrow Y$$

$\hat{L}$: L の近似作用素

$\hat{L}$ は有界な逆 $\hat{L}^{-1} : Y \longrightarrow X$ をもつ

$$\|L - \hat{L}\| \, \|\hat{L}^{-1}\| < 1$$

が成立するとき，L^{-1} が存在して

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|\hat{L}^{-1}\|}{1 - \|L - \hat{L}\| \, \|\hat{L}^{-1}\|}$$

を満たす.

Toshio Kato, “Perturbation Theory for Linear Operators”

線形化逆作用素のノルム評価II

- $L := F'[\hat{u}] : X \longrightarrow Y$
- $\|v\|_X \le \kappa \|Lv\|_Y,\ \forall v \in X$ となる $\kappa > 0$ の存在
- L^*L の最小固有値の下界の評価

  L が自己随伴の場合は L に対する固有値評価

$\boxed{\text{ホモトピー法}}$

固有値が解析的に分かる作用素から変形を加え，下界を押さえながら L^*L の固有値まで到達する方法

線形化逆作用素のノルム評価III

- $L := F'[\hat{u}] : X \longrightarrow Y$
- $\|v\|_X \le \kappa \|Lv\|_Y,\ \forall v \in X$ となる $\kappa > 0$ の存在
- $Lv = 0$ の解は $v = 0$ しかないことを検証
  $\longrightarrow L$ の可逆性
- さらに可逆性の十分条件を用いて $\kappa > 0$ の上界を評価

橋本 弘治, 渡部 善隆, 中尾 充宏:
線形楕円型作用素の可逆性の数値的検証とその非線形問題への応用,
日本応用数理学会 2003 年度年会講演予稿集, pp100-101.

必要な計算

必要な計算

- 線形計算の精度保証

必要な計算

- 線形計算の精度保証

  連立１次方程式　　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

必要な計算

- 線形計算の精度保証

  連立１次方程式　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

  一般化固有値問題　$A\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x}$

必要な計算

- 線形計算の精度保証

連立１次方程式	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
一般化固有値問題	$A\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x}$
特異値問題	$A = U\Sigma V^T$

必要な計算

- 線形計算の精度保証

連立１次方程式	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
一般化固有値問題	$A\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x}$
特異値問題	$A = U\Sigma V^T$

- 積分計算の精度保証

必要な計算

- 線形計算の精度保証

連立１次方程式	$Ax = \boldsymbol{b}$
一般化固有値問題	$A\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x}$
特異値問題	$A = U\Sigma V^T$

- 積分計算の精度保証
- チューニング
  - 記憶容量 (密行列，疎行列)
  - 速度 (線形計算，並列化)
  - 計算量 (区間演算)

必要な計算

- 線形計算の精度保証

  連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

  一般化固有値問題 $A\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x}$

  特異値問題 $A = U\Sigma V^T$

- 積分計算の精度保証
- チューニング
  - 記憶容量 (密行列，疎行列)
  - 速度 (線形計算，並列化)
  - 計算量 (区間演算)
- ツール
  - プログラミング言語
  - 数式処理

精度保証付き数値計算のエッセンス

精度保証付き数値計算のエッセンス

- 線形近似 (Newton 法)

精度保証付き数値計算のエッセンス

- 線形近似 (Newton 法)
- 線形化逆作用素の評価

精度保証付き数値計算のエッセンス

- 線形近似 (Newton 法)
- 線形化逆作用素の評価
- 不動点定理

精度保証付き数値計算のエッセンス

- 線形近似 (Newton 法)
- 線形化逆作用素の評価
- 不動点定理
- 有限次元線形計算